1

解答解説のページへ

放物線C：$y=x^2$と 2 直線l_1：$y=px-1$，l_2：$y=-x-p+4$は 1 点で交わるという。このとき，実数pの値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間上に 4 点 A$(2,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 1)$，C$(0,\ 1,\ 2)$，D$(1,\ 3,\ 7)$ がある。3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき，点 E の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。

4

解答解説のページへ

関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x \leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき $x=-1$ における この関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。

5

解答解説のページへ

n, k は自然数で, $k \leqq n$ とする。穴のあいた $2k$ 個の白玉と $2n-2k$ 個の黒玉にひもを通して輪を作る。このとき適当な 2 箇所でひもを切って n 個ずつの 2 組に分け, どちらの組も白玉 k 個, 黒玉 $n-k$ 個からなるようにできることを示せ。

1

問題のページへ

$C: y = x^2$ ……①，$l_1: y = px - 1$ ……②，$l_2: y = -x - p + 4$ ……③に対して，②と③の交点は，

$$px - 1 = -x - p + 4,\ (p+1)x = -p + 5$$

$p = -1$ では成立しないので，$p \neq -1$ より，$x = \dfrac{-p+5}{p+1}$

$$y = p \cdot \frac{-p+5}{p+1} - 1 = \frac{-p^2 + 4p - 1}{p+1}$$

②と③の交点が①上にあることより，

$$\frac{-p^2+4p-1}{p+1} = \left(\frac{-p+5}{p+1}\right)^2,\ (p+1)(-p^2+4p-1) = (-p+5)^2$$

まとめると，$p^3 - 2p^2 - 13p + 26 = 0$，$(p-2)(p^2-13) = 0$

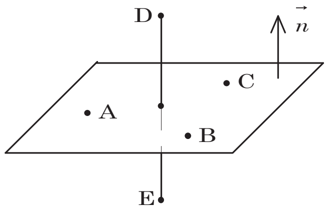
よって，$p = 2$，$\pm\sqrt{13}$

［解 説］

何か裏があるのではないか，たとえば「交わる」というのは「接する」場合を含まないという意味なのだろうか，などと勘ぐりたくなるほどの問題です。

2

問題のページへ



まず，$\overrightarrow{BA}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\ 1,\ 1)$となり，
平面ABCの法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，

$$\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=a+b-c=0$$
$$\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=-a+b+c=0$$

よって，$a=c$，$b=0$となり，$\vec{n}=a(1,\ 0,\ 1)$

すると，平面ABCの方程式は，

$$(x-2)+z=0,\ x+z=2\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\mathrm{E}(p,\ q,\ r)$とおくと，$\overrightarrow{DE}=(p-1,\ q-3,\ r-7)$

$\overrightarrow{DE}\parallel\vec{n}$より，$t$を実数として$\overrightarrow{DE}=t\vec{n}$となり，

$$(p-1,\ q-3,\ r-7)=t(1,\ 0,\ 1)$$

よって，$p=t+1$，$q=3$，$r=t+7\cdots\cdots\cdots②$

また，DEの中点$\left(\dfrac{p+1}{2},\ \dfrac{q+3}{2},\ \dfrac{r+7}{2}\right)$は，平面ABC上にあるので，①より，

$$\frac{p+1}{2}+\frac{r+7}{2}=2,\ p+r+4=0\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$2t+12=0$，$t=-6$

②から，$p=-5$，$q=3$，$r=1$となり，$\mathrm{E}(-5,\ 3,\ 1)$である。

［解 説］

本年度より，出題範囲に含まれた「代数・幾何」時代の頻出題です。平面の方程式の基本事項は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

3

問題のページへ

$Q(x)$ を複素数範囲で因数分解して,

$$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\quad (a\neq 0)$$

さて，$P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $A(x)$，余りを $px+q$ とおくと,

$$P(x)=Q(x)A(x)+(px+q)\quad (p^2+q^2\neq 0)$$

すると，$P(\alpha)=p\alpha+q$ ……①，$P(\beta)=p\beta+q$ ……②

次に，$\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割った商を $B(x)$ とおくと,

$$\{P(x)\}^2=Q(x)B(x)$$

すると，$\{P(\alpha)\}^2=\{P(\beta)\}^2=0$ より，$P(\alpha)=P(\beta)=0$ ………③

①②③より，$p\alpha+q=0$，$p\beta+q=0$ となり,

$$p(\alpha-\beta)=0$$

ここで，$\alpha\neq\beta$ とすると $p=q=0$ となり，$p^2+q^2\neq 0$ に反する。

よって，$\alpha=\beta$ となるので, 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつ。

[解 説]

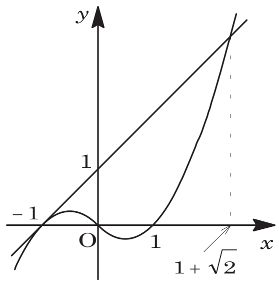
$Q(x)$ の因数分解を設定して，剰余の定理を用いる解法を採用しました。

4

問題のページへ

関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\leqq 0$ の部分は，頂点が $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ の放物線より，a を 0 でない定数として，

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



原点を通るので，$0=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}$，$a=-1$

よって，$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，$y=-x^2-x$ ………①

また，関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\geqq 0$ の部分は，$x\leqq 0$ の部分を原点対称したものなので，

$$-y=-(-x)^2-(-x),\quad y=x^2-x \text{ ………②}$$

さて，①より $y'=-2x-1$ なので，$x=-1$ のとき $y'=1$ となり，点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は，

$$y=x+1 \text{ ………③}$$

②と③の交点は，$x^2-x=x+1$，$x^2-2x-1=0$ より，$x=1+\sqrt{2}$

以上より，求める図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}(x+1+x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(x+1-x^2+x)\,dx\\&=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(-x^2+2x+1)\,dx\\&=\Big[\frac{1}{3}(x+1)^3\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\Big]_{0}^{1+\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})\\&=2+\frac{4}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

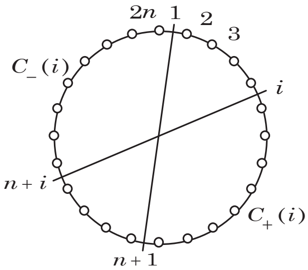
［解　説］

微積分のセンターレベルの基本題です。なお，定積分の計算は，工夫なしで実行しています。

5

問題のページへ

右図のように，玉と玉の間のひもに，番号を 1 から $2n$ までつける。



$1 \leqq i \leqq 2n$ として，番号 i と $i+n$ のひもを切って，玉を n 個ずつの 2 組 $C_+(i)$ と $C_-(i)$ に分ける。ただし，j を正の整数として，番号 $2n+j$ は j と等しいとする。

ここで，$C_+(i)$ の白玉の個数を $N_+(i)$，$C_-(i)$ の白玉の個数を $N_-(i)$ とおく。

(i)　$N_+(1)=k$ のとき

切断する位置を $(1,\ n+1)$ として 2 組に分けると，題意に適する。

(ii)　$N_+(1) \geqq k+1$ のとき

$N_+(1)+N_-(1)=2k$ より，$N_-(1) \leqq k-1$ である。

さて，切断する位置を $(1,\ n+1)$，$(2,\ n+2)$，…，$(n,\ 2n)$，$(n+1,\ 2n+1)$ と変化させて，数列 $N_+(1)$，$N_+(2)$，…，$N_+(n)$，$N_+(n+1)$ を考えると，隣接する 2 項の関係は，次の 3 つの場合のいずれかとなる。

$$N_+(i+1)=N_+(i)+1,\quad N_+(i+1)=N_+(i),\quad N_+(i+1)=N_+(i)-1$$

さらに，$N_+(1) \geqq k+1$ であり，しかも $N_+(n+1)=N_-(1) \leqq k-1$ であるので，$N_+(i)=k$ となる i が，$2 \leqq i \leqq n$ に少なくとも 1 つ存在する。

このとき，切断する位置を $(i,\ i+n)$ として 2 組に分けると，題意に適する。

(iii)　$N_+(1) \leqq k-1$ のとき

(ii)と同様に考えると，$N_+(n+1)=N_-(1) \geqq k+1$ となることより，$N_+(i)=k$ となる i が，$2 \leqq i \leqq n$ に少なくとも 1 つ存在し，切断する位置を $(i,\ i+n)$ として 2 組に分けると，題意に適する。

［解 説］

最後にやっと，京大らしい記述力の要する問題が現れました。