1

解答解説のページへ

$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標空間の 3 点を $A(0,\ 1,\ 2)$，$B(2,\ 3,\ 0)$，$P(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$とする。線分 OP と線分 AB が交点をもつような実数 t が存在することを示せ。また，そのときの交点の座標を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x\leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき $x=-1$ におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。

5

解答解説のページへ

△ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ として，関数 F を $F(\theta)=\displaystyle\int_0^{\theta} x\cos(x+\alpha)\,dx$ で定める。θ が $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ の範囲を動くとき，F の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

$Q(x)$を複素数範囲で因数分解して,

$$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\quad(a\neq 0)$$

さて，$P(x)$を$Q(x)$で割った商を$A(x)$，余りを$px+q$とおくと,

$$P(x)=Q(x)A(x)+(px+q)\quad(p^2+q^2\neq 0)$$

すると，$P(\alpha)=p\alpha+q\cdots\cdots$①，$P(\beta)=p\beta+q\cdots\cdots$②

次に，$\{P(x)\}^2$を$Q(x)$で割った商を$B(x)$とおくと,

$$\{P(x)\}^2=Q(x)B(x)$$

すると，$\{P(\alpha)\}^2=\{P(\beta)\}^2=0$より，$P(\alpha)=P(\beta)=0\cdots\cdots\cdots$③

①②③より，$p\alpha+q=0$，$p\beta+q=0$となり,

$$p(\alpha-\beta)=0$$

ここで，$\alpha\neq\beta$とすると$p=q=0$となり，$p^2+q^2\neq 0$に反する。

よって，$\alpha=\beta$となるので, 2次方程式$Q(x)=0$は重解をもつ。

［解 説］

$Q(x)$の因数分解を設定して，剰余の定理を用いる解法を採用しました。

2

問題のページへ

まず，線分 AB 上の点は，$0 \leqq s \leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z) = s(0,\ 1,\ 2) + (1-s)(2,\ 3,\ 0) = (-2s+2,\ -2s+3,\ 2s)$$

また，線分 OP 上の点は，$0 \leqq u \leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z) = u(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$$

線分 AB と線分 OP が交わるのは，

$$(-2s+2,\ -2s+3,\ 2s) = u(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$$

すなわち，$-2s+2 = u(5+t)$ ……①，$-2s+3 = u(9+2t)$ ……②

$$2s = u(5+3t) \text{ ……③}$$

①②より，$1 = u(4+t)$ ………④

②③より，$3 = u(14+5t)$ ………⑤

④⑤より，$14+5t-3(4+t)=0$ となり，$t=-1$ である。

このとき，$u=\dfrac{1}{3}$，$s=\dfrac{1}{3}$ となり，$0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq u \leqq 1$ を満たすので，$t=-1$ のとき，線分 OP と線分 AB は交点をもつ。

また，交点の座標は，

$$(x,\ y,\ z) = \frac{1}{3}(5-1,\ 9-2,\ 5-3) = \left(\frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

[解　説]

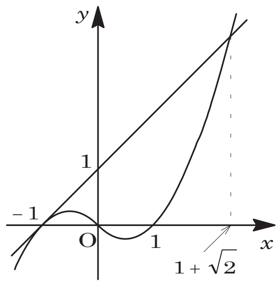
空間内の 2 直線が，交点をもつという特別な位置関係にあることを示す問題です。これは，連立方程式①②③が解をもつ条件として，言い換えることができます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\leqq 0$ の部分は，頂点が $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ の放物線より，a を 0 でない定数として，

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



原点を通るので，$0=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}$，$a=-1$

よって，$y=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，$y=-x^2-x$ ………①

また，関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\leqq 0$ の部分は，$x\leqq 0$ の部分を原点対称したものなので，

$$-y=-(-x)^2-(-x),\ \ y=x^2-x \text{ ………②}$$

さて，①より $y'=-2x-1$ なので，$x=-1$ のとき $y'=1$ となり，点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は，

$$y=x+1 \text{ ………③}$$

②と③の交点は，$x^2-x=x+1$，$x^2-2x-1=0$ より，$x=1+\sqrt{2}$

以上より，求める図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{0}(x+1+x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(x+1-x^2+x)\,dx\\
&=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(-x^2+2x+1)\,dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}}\\
&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})\\
&=2+\frac{4}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

［解 説］

微積分のセンターレベルの基本題です。なお，定積分の計算は，工夫なしで実行しています。

4

問題のページへ

(i)　$n=2$ のとき

$n^2+2=6$ となり，n^2+2 は素数ではない。

(ii)　$n=3$ のとき

$n^2+2=11$ となり, n と n^2+2 はともに素数である。

(iii)　$n\geqq 5$ のとき

n は素数なので，2 の倍数でなく，しかも 3 の倍数でもないことより，k を自然数として，$n=6k\pm1$ と表すことができる。このとき,

$$n^2+2=(6k\pm1)^2+2=36k^2\pm12k+3=3(12k^2\pm4k+1)$$

すると，$12k^2\pm4k+1$ は整数なので，n^2+2 は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)～(iii)より, n と n^2+2 がともに素数になるのは，$n=3$ の場合のみである。

［解 説］

まず，$n=2$，3，5，7，11，13 として n^2+2 を計算したところ，n が 5 以上のとき，n^2+2 は 3 の倍数になると推測できました。これを，式を用いて確認した解です。

5

問題のページへ

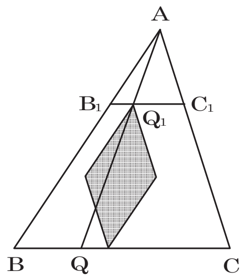
BC 上に点 Q を固定し, $0<p<1$, $0<r<1$ として,

$$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$$

△PQR の重心を G とすると,

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+p\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+r\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

ここで, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AQ_1}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_1}$ とおき, 線分 AB_1, AC_1 を隣りあう 2 辺とする平行四辺形を S_A とおく。

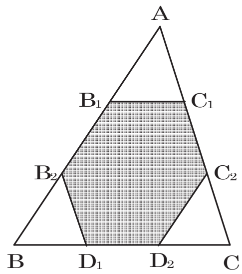


さて, p, r を $0<p<1$, $0<r<1$ を満たすように動かすと, 点 G は, S_A を $\overrightarrow{AQ_1}$ だけ平行移動した平行四辺形 S_{Q_1} の内部を動く。

ここで, 点 Q を辺 BC 上で点 B から点 C まで動かすと, 点 Q_1 は線分 B_1C_1 上を点 B_1 から点 C_1 まで動く。その結果, 平行四辺形 S_{Q_1} は平行移動し, その通過領域が点 G の動く範囲である。

以上より, 辺 AB の三等分点を B_1, B_2, 辺 AC の三等分点を C_1, C_2, 辺 BC の三等分点を D_1, D_2 とおくと, 点 G は六角形 $B_1B_2D_1D_2C_2C_1$ の内部を動く。

すなわち, 点 G の動く範囲は右図の網点部である。ただし, 境界線は含まない。



［解 説］

独立に動く点が 3 つあり, そのうちの 1 つを固定して考えた解です。そのプロセスが記述しにくく, そのため演習するのに適した問題です。

6

問題のページへ

条件より，$F(\theta)=\int_0^{\theta} x\cos(x+\alpha)\,dx$ なので,

$$F'(\theta)=\theta\cos(\theta+\alpha)$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$0<\theta+\alpha<\pi$ となり，$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$のとき $F'(\theta)=0$ となる。

すると，右の増減表より，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき $F(\theta)$ は最大となる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$F'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$F(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$F(\theta)$ の最大値は,

$$F\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} x\cos(x+\alpha)\,dx=\Big[x\sin(x+\alpha)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}-\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\sin(x+\alpha)\,dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\pi}{2}+\Big[\cos(x+\alpha)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}=\frac{\pi}{2}-\alpha-\cos\alpha$$

［解　説］

あまりにも簡単に結果がでてしまい，不気味な感じがします。