1

解答解説のページへ

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

[1]　$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とするとき，$A^6+2A^4+2A^3+2A^2+2A+3E$を求めよ。

[2]　四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり，1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに，等しい確率で移動する。

このとき, n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

3 次関数 $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ のグラフ上の点 $(1,\ 0)$ における接線を l とする。この 3 次関数のグラフと接線 l で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\quad ad-bc+p=0,\quad a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

座標空間で点 $(3,\ 4,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l, 点 $(2,\ -1,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{b}=(1,\ -2,\ 0)$ に平行な直線を m とする。点 P は直線 l 上を, 点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

命題 q：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。

1

問題のページへ

[1]　$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$に対し，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$A^2-(2-1)A+(-2+4)E=O\,,\ \ A^2-A+2E=O$$

ここで，$x^6+2x^4+2x^3+2x^2+2x+3$をx^2-x+2で割ると，

$$x^6+2x^4+2x^3+2x^2+2x+3=(x^2-x+2)(x^4+x^3+x^2+x+1)+x+1$$

AとEは交換可能であるので，上式を利用して，

$$\begin{aligned}&A^6+2A^4+2A^3+2A^2+2A+3E\\=&(A^2-A+2E)(A^4+A^3+A^2+A+E)+A+E\\=&A+E=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

[2]　n秒後に点Pが頂点Oにある確率をp_nとする。

さて，n秒後に点Pが頂点Oにある条件は，$n-1$秒後に点PがO以外の点にあり，1秒後にOに移ることである。このとき，O以外のA，B，C，Dいずれの点にあるときも，Oに移る確率は$\dfrac{1}{3}$なので，

$$p_n=\frac{1}{3}(1-p_{n-1})$$

変形すると，$p_n-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}\Big(p_{n-1}-\dfrac{1}{4}\Big)$となり，$p_0=1$から，

$$p_n-\frac{1}{4}=\Big(p_0-\frac{1}{4}\Big)\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n=\frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)^n$

［解 説］

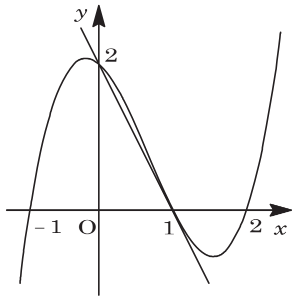
[1]は行列の多項式の計算問題，[2]は確率と漸化式の融合問題という，どちらも参考書の例題に載っている有名題が独立に並べてあります。

2

問題のページへ

$y=x^3-2x^2-x+2$を変形すると，$y=(x-2)(x-1)(x+1)$……①となり，

$$y'=3x^2-4x-1$$



$x=1$のとき$y'=-2$より，接線lの方程式は，

$$y=-2(x-1)\cdots\cdots\cdots②$$

①②の共有点は，

$$(x-2)(x-1)(x+1)=-2(x-1),\ x(x-1)^2=0$$

よって，$x=0,\ 1$となる。

これより，①と②で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積をVとすると，

$$V=\pi\int_0^1(x-2)^2(x-1)^2(x+1)^2dx-\frac{1}{3}\pi\cdot2^2\cdot1$$

$$=\pi\int_0^1(x^6-4x^5+2x^4+8x^3-7x^2-4x+4)dx-\frac{4}{3}\pi$$

$$=\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+2-\frac{7}{3}-2+4\right)-\frac{4}{3}\pi=\frac{54}{35}\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{22}{105}\pi$$

［解　説］

募集要項に記載の数Ⅱの範囲外からの出題です。体積計算について，基本的な知識があれば，単なる計算練習にすぎません。

$\boxed{3}$

問題のページへ

まず，$a+b+c+d=0$ ……①，$ad-bc+p=0$ ……②より，

$$a(-a-b-c)-bc+p=0,\ a^2+ab+ac+bc=p$$

変形して，$(a+b)(a+c)=p$ ………③

ここで，$a \geqq b \geqq c \geqq d$ ……④より，$a+b \geqq a+c$

①④より，$0=a+b+c+d \leqq a+b+a+b=2(a+b)$ から，$a+b \geqq 0$

よって, p は素数なので，③から，

$$a+b=p \text{ ………⑤},\ a+c=1 \text{ ………⑥}$$

⑤より $b=p-a$ …… ⑤′，⑥より $c=1-a$ …… ⑥′

①から，$d=-a-(p-a)-(1-a)=-p-1+a$ ………⑦

⑤′ ⑥′ ⑦を④に代入すると，$a \geqq p-a \geqq 1-a \geqq -p-1+a$ となり，

$$a \geqq p-a \text{ ………⑧},\ p-a \geqq 1-a \text{ ………⑨},\ 1-a \geqq -p-1+a \text{ ………⑩}$$

⑧より $a \geqq \dfrac{p}{2}$，⑩より $a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ となり，$\dfrac{p}{2} \leqq a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ ………⑪

また，⑨は $p \geqq 1$ となり成立する。

そこで, p は 3 以上の素数，すなわち奇数であることを用いると，⑪から，

$$a=\frac{p+1}{2}$$

すると，⑤′ ⑥′ ⑦から，

$$b=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2},\ c=1-\frac{p+1}{2}=\frac{-p+1}{2},\ d=-p-1+\frac{p+1}{2}=\frac{-p-1}{2}$$

[解 説]

京大らしい味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが，そのポイントは, 2 以外の素数は奇数という事実です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

t, s を実数とすると，条件より，直線 l, m のパラメータ表示は，

$$l : (x,\ y,\ z) = (3,\ 4,\ 0) + t(1,\ 1,\ 1) = (3+t,\ 4+t,\ t)$$

$$m : (x,\ y,\ z) = (2,\ -1,\ 0) + s(1,\ -2,\ 0) = (2+s,\ -1-2s,\ 0)$$

これより，$\mathrm{P}(3+t,\ 4+t,\ t)$，$\mathrm{Q}(2+s,\ -1-2s,\ 0)$ とおくことができ，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (3+t-2-s)^2 + (4+t+1+2s)^2 + t^2\\ &= 3t^2 + 5s^2 + 2st + 12t + 18s + 26 = 3t^2 + 2(s+6)t + 5s^2 + 18s + 26\\ &= 3\left(t + \frac{s+6}{3}\right)^2 - \frac{(s+6)^2}{3} + 5s^2 + 18s + 26\\ &= 3\left(t + \frac{s+6}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}s^2 + 14s + 14 = 3\left(t + \frac{s+6}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

よって，$t + \dfrac{s+6}{3} = 0$，$s + \dfrac{3}{2} = 0$，すなわち $t = s = -\dfrac{3}{2}$ のとき，PQ^2 は最小となり，このとき PQ は最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ をとる。

［解 説］

ねじれの位置にある 2 直線上の点の最短距離を求める問題です。図形的には，2 直線の共通垂線の長さに対応します。この視点から，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b} = 0$ を解いて，PQ が最小になる s, t の値を求めるという別解も考えられます。

5

問題のページへ

[1]　命題 p について

自然数 n に対し，$\sqrt{n}$ が有理数のとき, p, q を互いに素である自然数として,

$$\sqrt{n}=\frac{q}{p},\quad n=\frac{q^2}{p^2}$$

p^2，q^2 も互いに素であるので，$p^2=1$，すなわち $p=1$ である。

よって，$\sqrt{n}$ が有理数のとき，$\sqrt{n}$ は自然数である。

さて，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数，すなわち整数と仮定すると,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1$$

これは，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに整数であることに反する。

よって，命題 p は正しくない。

[2]　命題 q について

[1]から，すべての n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ の少なくとも一方は無理数である。

(i)　$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ の一方が有理数，もう一方が無理数のとき

このとき，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数となる。

(ii)　$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ のともに無理数のとき

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数と仮定すると, r, s を互いに素である自然数として,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{s}{r},\quad \sqrt{n+1}=\sqrt{n}+\frac{s}{r}$$

両辺を 2 乗して,

$$n+1=n+\frac{2s}{r}\sqrt{n}+\frac{s^2}{r^2},\quad \sqrt{n}=\frac{s}{2r}-\frac{r}{2s}$$

すると，左辺は無理数，右辺は有理数となり成立しない。

よって，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。

(i)(ii)より，命題 q は正しい。

［解 説］

どこかで出合ったことがあると感じる問題です。結論の予測が正しければ，背理法を利用するだけで，その根拠が説明できます。