

1

解答解説のページへ

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

[1] 定積分 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ を求めよ。

[2] 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき, 1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

2

解答解説のページへ

x, y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 (x, y) の範囲を図示せよ。

3

解答解説のページへ

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき、 a, b, c, d を p を用いて表せ。

4

[解答解説のページへ](#)

点 O を中心とする円に内接する $\triangle ABC$ の 3 辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:3$ に内分する点を P, Q, R とする。 $\triangle PQR$ の外心が点 O と一致するとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

5

解答解説のページへ

A を 2 次の正方行列とする。列ベクトル \vec{x}_0 に対し、列ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ を

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。ある零ベクトルではない \vec{x}_0 について、3 以上の自然数 m で初めて \vec{x}_m が \vec{x}_0 と一致するとき、行列 A^m は単位行列であることを示せ。

6

解答解説のページへ

すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たし、さらに任意の実数 a, b に対して $1 + f(a)f(b) \neq 0$ であって

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$$

を満たしている。

- (1) 任意の実数 a に対して、 $-1 < f(a) < 1$ であることを証明せよ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフは $x > 0$ で上に凸であることを証明せよ。

1

問題のページへ

$$[1] \quad I = \int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \text{ とおく.}$$

まず, $x^2+4=t$ とおくと,

$$\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_4^8 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2[\sqrt{t}]_4^8 = 4\sqrt{2} - 4$$

また, $x = 2 \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$), さらに $\sin \theta = u$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2} \log(\sqrt{2}+1)^2 = \log(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

以上より, $I = 4\sqrt{2} - 4 + \log(\sqrt{2}+1)$

[2] 1 段昇るのを x 回, 2 段昇るのを y 回とすると, 条件より, $x+2y=15$

さらに, 2 段昇ることは連続しないので, $x+1 \geq y$ となり,

$$(x, y) = (5, 5), (7, 4), (9, 3), (11, 2), (13, 1), (15, 0)$$

$(x, y) = (5, 5)$ のとき, 1 段を昇るのが 5 回, 2 段を連続せずに昇るのが 5 回で

ある。その場合の数を求めるために, 右図のように 1 段を 5 個並べ, その間また

∨ 1 段 ∨ 1 段 ∨ 1 段 ∨ 1 段 ∨ 1 段 ∨

は前後の 6 か所ある ∨ のうちから 5 個を選び, そこで 2 段を昇ると考える。すると, この場合は ${}_6C_5$ 通りであることがわかる。

同様に考えると, $(x, y) = (7, 4)$ のとき ${}_8C_4$ 通り, $(x, y) = (9, 3)$ のとき ${}_{10}C_3$ 通り, $(x, y) = (11, 2)$ のとき ${}_{12}C_2$ 通り, $(x, y) = (13, 1)$ のとき ${}_{14}C_1$ 通り, $(x, y) = (15, 0)$ のとき 1 通りである。

したがって, 条件を満たす 15 段の階段を昇る昇り方の総数は,

$${}_6C_5 + {}_8C_4 + {}_{10}C_3 + {}_{12}C_2 + {}_{14}C_1 + 1 = 277$$

[解説]

[1]は積分計算, [2]は場合の数という小問 2 題で構成されています。[2]では漸化式の利用という有名な方法もあり, どちらを選択するかについて迷いましたが, 15 段という小さな値から判断し, 直接的に数えました。

2

問題のページへ

k を 0 でない定数として、漸化式 $a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \dots\dots$ ①を満たす 1 つの数列を $a_n = ky^n$ とすると、

$$ky^{n+1} = kxy^n + y^{n+1} \dots\dots\dots$$
②

②より、 $x > 0, y > 0, x \neq y$ なので、 $ky = kx + y, k = \frac{y}{y-x}$

①-②より、 $a_{n+1} - ky^{n+1} = x(a_n - ky^n)$

$a_1 = 0$ から、 $a_n - ky^n = (a_1 - ky^1)x^{n-1} = -kxy^{n-1}$

$$a_n = ky(y^{n-1} - x^{n-1}) = \frac{y^2}{y-x}(y^{n-1} - x^{n-1}) \dots\dots\dots$$
③

(i) $y > x$ のとき

$0 < \frac{x}{y} < 1$ から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n = 0$ となり、③より、

$$a_n = \frac{y^2}{y-x} y^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} \right\}$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束する条件は、 $0 < y \leq 1$ である。

(ii) $x > y$ のとき

$0 < \frac{y}{x} < 1$ から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{x}\right)^n = 0$ となり、③より、

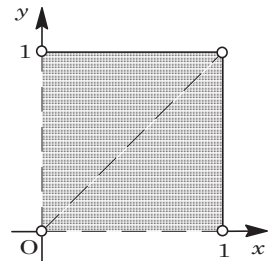
$$a_n = \frac{y^2}{y-x} x^{n-1} \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} - 1 \right\}$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束する条件は、 $0 < x \leq 1$

である。

(i)(ii)より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束するような点 (x, y)

を図示すると、右図の網点部のようになる。ただし、実線の境界は含み、破線の境界は含まない。



[解説]

漸化式の解法問題です。一般項が求めれば、収束する条件を丁寧に図示するだけです。なお、上記の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

3

問題のページへ

まず, $a+b+c+d=0$ ……①, $ad-bc+p=0$ ……②より,

$$a(-a-b-c)-bc+p=0, \quad a^2+ab+ac+bc=p$$

変形して, $(a+b)(a+c)=p$ ……③

ここで, $a \geq b \geq c \geq d$ ……④より, $a+b \geq a+c$

①④より, $0=a+b+c+d \leq a+b+a+b=2(a+b)$ から, $a+b \geq 0$

よって, p は素数なので, ③から,

$$a+b=p \text{ ……⑤}, \quad a+c=1 \text{ ……⑥}$$

⑤より $b=p-a$ ……⑤', ⑥より $c=1-a$ ……⑥'

①から, $d=-a-(p-a)-(1-a)=-p-1+a$ ……⑦

⑤' ⑥' ⑦を④に代入すると, $a \geq p-a \geq 1-a \geq -p-1+a$ となり,

$$a \geq p-a \text{ ……⑧}, \quad p-a \geq 1-a \text{ ……⑨}, \quad 1-a \geq -p-1+a \text{ ……⑩}$$

⑧より $a \geq \frac{p}{2}$, ⑩より $a \leq \frac{p}{2}+1$ となり, $\frac{p}{2} \leq a \leq \frac{p}{2}+1$ ……⑪

また, ⑨は $p \geq 1$ となり成立する。

そこで, p は 3 以上の素数, すなわち奇数であることを用いると, ⑪から,

$$a = \frac{p+1}{2}$$

すると, ⑤' ⑥' ⑦から,

$$b = p - \frac{p+1}{2} = \frac{p-1}{2}, \quad c = 1 - \frac{p+1}{2} = \frac{-p+1}{2}, \quad d = -p-1 + \frac{p+1}{2} = \frac{-p-1}{2}$$

[解説]

京大らしい味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが、そのポイントは、2 以外の素数は奇数という事実です。

4

問題のページへ

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とすると, 条件より,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| \cdots \cdots (*)$$

ここで, 条件より, $\vec{OP} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + 2\vec{b})$

$$\vec{OQ} = \frac{1}{5}(3\vec{b} + 2\vec{c}), \quad \vec{OR} = \frac{1}{5}(3\vec{c} + 2\vec{a})$$

さて, $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = |\vec{OR}|$ から,

$$|3\vec{a} + 2\vec{b}| = |3\vec{b} + 2\vec{c}| = |3\vec{c} + 2\vec{a}|$$

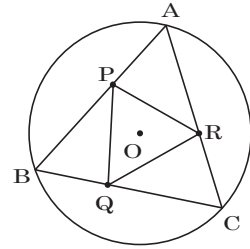
$$9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{b} \cdot \vec{c} + 4|\vec{c}|^2 = 9|\vec{c}|^2 + 12\vec{c} \cdot \vec{a} + 4|\vec{a}|^2$$

よって, (*) から, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$

すると, $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$ から,

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{c}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2$$

以上より, $AB = BC = CA$ となるので, $\triangle ABC$ は正三角形である。



[解説]

ベクトル利用という方針を立てた後は, その始点を決定するわけですが, これを点 O にすることには, ためらいはないでしょう。ここまで準備をすると, 簡単な計算で結論が導けます。

5

まず, $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ より, $\vec{x}_n = A^n \vec{x}_0$

ここで, m を 3 以上の自然数として, 条件から $\vec{x}_m = \vec{x}_0$ なので,

$$A^m \vec{x}_0 = \vec{x}_0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $A^{m+1} \vec{x}_0 = A\vec{x}_0$ から, $A^m \vec{x}_1 = \vec{x}_1 \cdots \cdots \textcircled{2}$

ここで, 列ベクトル \vec{x}_0, \vec{x}_1 を横に並べてできる行列を $(\vec{x}_0 \ \vec{x}_1)$ と表すと, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,

$$A^m (\vec{x}_0 \ \vec{x}_1) = (\vec{x}_0 \ \vec{x}_1) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i) $\vec{x}_1 \neq k\vec{x}_0$ (k は実数) のとき

逆行列 $(\vec{x}_0 \ \vec{x}_1)^{-1}$ が存在し, 単位行列を E とすると, $\textcircled{3}$ から,

$$A^m = (\vec{x}_0 \ \vec{x}_1) (\vec{x}_0 \ \vec{x}_1)^{-1} = E$$

(ii) $\vec{x}_1 = k\vec{x}_0$ (k は実数) のとき

条件より, $\vec{x}_1 = A\vec{x}_0$ なので, $A\vec{x}_0 = k\vec{x}_0$ となり,

$$A^m \vec{x}_0 = k^m \vec{x}_0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$ より, $\vec{x}_0 = k^m \vec{x}_0$, $(k^m - 1)\vec{x}_0 = \vec{0}$

すると, $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ から, $k^m = 1$

(ii-i) $k = 1$ のとき

$A\vec{x}_0 = \vec{x}_0$ となるので, $m = 1$ で $\vec{x}_m = \vec{x}_0$ が成立し, $m \geq 3$ に反する。

(ii-ii) $k = -1$ のとき

$A\vec{x}_0 = -\vec{x}_0$ となるので,

$$A^2 \vec{x}_0 = -A\vec{x}_0 = \vec{x}_0$$

よって, $m = 2$ で $\vec{x}_m = \vec{x}_0$ が成立し, $m \geq 3$ に反する。

したがって $\vec{x}_1 = k\vec{x}_0$ の場合は題意を満たさない。

(i)(ii) より, $A^m = E$ である。

[解説]

2 つの列ベクトル \vec{x}_0, \vec{x}_1 が 1 次独立のとき, 行列 $(\vec{x}_0 \ \vec{x}_1)$ は逆行列をもつということを, 指針とした解です。1 次変換が復活したばかりなので難しく感じますが, 数年たつと, 標準的な問題になるでしょう。

6

問題のページへ

(1) $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ……①において, $b = -a$ とおくと, $f(0) = 0$ から,

$$0 = \frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)}, \quad f(-a) = -f(a) \dots\dots\dots②$$

また, ①において, $b = a$ とおくと, $f(2a) = \frac{2f(a)}{1+\{f(a)\}^2}$ となり,

$$f(a)+1 = \frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2} + 1 = \frac{\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)+1\right\}^2}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2} \geq 0$$

ここで, $f\left(\frac{a}{2}\right) = -1$ となる a の存在を仮定すると, ②より,

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = -f\left(\frac{a}{2}\right) = 1$$

すると, $1+f\left(\frac{a}{2}\right)f\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$ となり, 条件に反する。

よって, $f(a)+1 > 0$ から, $f(a) > -1$ となる。

さらに, ②を用いると, $f(-a) = -f(a) < 1$ となり, a が任意より $f(a) < 1$ 以上より, $-1 < f(a) < 1$ である。

(2) ①の両辺を b で微分すると,

$$\begin{aligned} f'(a+b) &= \frac{f'(b)\{1+f(a)f(b)\} - \{f(a)+f(b)\}f'(a)f'(b)}{\{1+f(a)f(b)\}^2} \\ &= \frac{f'(b)[1-\{f(a)\}^2]}{\{1+f(a)f(b)\}^2} \dots\dots\dots③ \end{aligned}$$

③に $b = 0$ を代入すると,

$$f'(a) = \frac{f'(0)[1-\{f(a)\}^2]}{\{1+f(a)f(0)\}^2} = 1 - \{f(a)\}^2 \dots\dots\dots④$$

すると, (1) から, $-1 < f(x) < 1$ なので, $f'(x) = 1 - \{f(x)\}^2 > 0$ となり, $x > 0$ で

$$f(x) > f(0) = 0$$

このとき, ④より, $f''(x) = -2f(x)f'(x) < 0$

よって, $y = f(x)$ のグラフは $x > 0$ で上に凸である。

[解説]

$f(0) = 0$ が利用できるように, a と b に適当な関係を設定していくと, $f(x)$ が奇関数であることがわかります。この点を解の糸口としています。