1　解答解説のページへ

実数 $a,\ b,\ c$ に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。このとき

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx \leqq 6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$$

であることを示せ。

2

解答解説のページへ

$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を，$AN : NB = 2 : 1$ となるようにとる。このとき $\angle BCM = \angle BCN$ となることを示せ。ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする。

3

解答解説のページへ

定数 a は実数であるとする。方程式$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$を満たす実数 x はいくつあるか。a の値によって分類せよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x \cos x = 0$ を満たす x の個数を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする。F 上の点 P に対して，始点と終点がともに P であるような，図形 F の一筆がきの経路の数を $N(\mathrm{P})$ で表す。正 n 角形の頂点をひとつとって A とし，$a=N(\mathrm{A})$ とおく。また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし，$b=N(\mathrm{B})$ とおく。このとき a と b を求めよ。

注：一筆がきとは，図形を，かき始めから終わりまで，筆を紙からはなさず，また同じ線上を通らずにかくことである。

1

問題のページへ

$f(x) = ax^2 + bx + c$ に対して，$f'(x) = 2ax + b$ となる。

さて，$I_1 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx$，$I_2 = 6\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx$ とおくと，

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)(4a^2x^2 + 4abx + b^2)\,dx = 2\int_0^1 (4a^2x^2 + b^2 - 4a^2x^4 - b^2x^2)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{4}{3}a^2 + b^2 - \frac{4}{5}a^2 - \frac{1}{3}b^2\right) = \frac{16}{15}a^2 + \frac{4}{3}b^2$$

$$I_2 = 6\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)^2 dx = 12\int_0^1 (a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2acx^2)\,dx$$

$$= 12\left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + c^2 + \frac{2}{3}ac\right) = \frac{12}{5}a^2 + 4b^2 + 12c^2 + 8ac$$

すると，$I_2 - I_1 = \left(\frac{12}{5}a^2 + 4b^2 + 12c^2 + 8ac\right) - \left(\frac{16}{15}a^2 + \frac{4}{3}b^2\right)$

$$= \frac{4}{3}a^2 + \frac{8}{3}b^2 + 12c^2 + 8ac = \frac{4}{3}(a+3c)^2 + \frac{8}{3}b^2 \geqq 0$$

よって，$I_1 \leqq I_2$ となり，

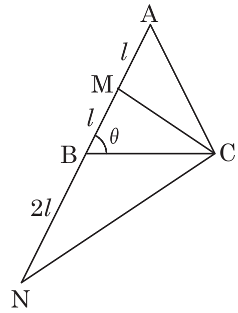
$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx \leqq 6\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx$$

［解 説］

定積分の計算問題ですが，積分区間に注目をして，偶関数と奇関数に分ける工夫が必要です。

2

問題のページへ



まず，$AB=AC=2l$，$\angle ABC=\theta$ とおくと，

$$BC=2\times 2l\cos\theta=4l\cos\theta$$

△BCM に余弦定理を適用すると，

$$CM^2=l^2+(4l\cos\theta)^2-2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos\theta$$
$$=l^2+8l^2\cos^2\theta=l^2(1+8\cos^2\theta)$$

次に，△BCN に余弦定理を適用すると，

$$CN^2=(2l)^2+(4l\cos\theta)^2-2\cdot 2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos(\pi-\theta)$$
$$=4l^2+32l^2\cos^2\theta=4l^2(1+8\cos^2\theta)$$

すると，$CM^2:CN^2=1:4$ となり，

$$CM:CN=1:2\cdots\cdots\cdots①$$

また，条件より，$MB:BN=1:2\cdots\cdots\cdots②$

①②から，$MB:BN=CM:CN$ となることより，$\angle BCM=\angle BCN$ である。

［解 説］

内角の二等分線の定理を利用するという方針を立て，その方向に沿って解きました。他にもいろいろな解法が考えられます。

3

問題のページへ

方程式$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ ……①に対して,

$$x^2+ax+1=0 \cdots\cdots\cdots ②,\ \ 3x^2+ax-3=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より$ax=-x^2-1$, ③より$ax=-3x^2+3$

すると, ①の異なる実数解の個数は, $y=-x^2-1$ ……④, $y=-3x^2+3$ ……⑤の 2 つのグラフと$y=ax$ ……⑥のグラフの共有点の個数に一致する。

さて, ④と⑤の交点は,

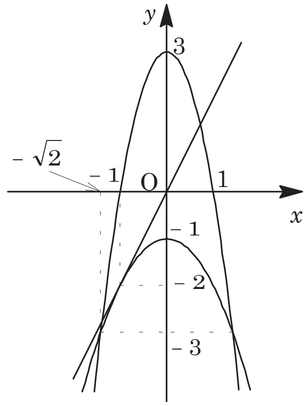
$$-x^2-1=-3x^2+3,\ \ x=\pm\sqrt{2}$$

よって, $(-\sqrt{2},\ -3)$, $(\sqrt{2},\ -3)$である。

また, ④と⑥が接するのは, ②が重解をもつときより,

$$D=a^2-4=0,\ \ a=\pm 2$$

このとき, 重解は$x=-\dfrac{a}{2}=\mp 1$であり, 接点は$(-1,\ -2)$, $(1,\ -2)$となる。



以上より, 方程式①の異なる実数解の個数は, 対称性に注意すると, 右図より, $|a|<2$のとき 2 個, $|a|=2$または$|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$のとき 3 個, $2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$または$|a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}}$のとき 4 個である。

［解 説］

②と③の方程式の異なる実数解の個数を, 図を用いて視覚的にとらえています。なお, ③がつねに異なる 2 実数解をもつために, 場合分けだけで攻めても, さほど複雑にはなりません。

4

問題のページへ

$2\sqrt{2}(\sin^3 x+\cos^3 x)+3\sin x\cos x=0$ ……①に対して，$t=\sin x+\cos x$ とおくと，

$$t^2=1+2\sin x\cos x\ ,\ \ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

①に代入して，$2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t\right)+\frac{3}{2}(t^2-1)=0$

$$2\sqrt{2}t^3-6\sqrt{2}t-3t^2+3=0,\ \ 4t^3-3\sqrt{2}t^2-12t+3\sqrt{2}=0\ \cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$0\leqq x<2\pi$，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$より，方程式②を満たす 1 つの解に対して，方程式①を満たす解の個数は，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ のとき 2 個，$t=\pm\sqrt{2}$ のとき 1 個となり，$t<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<t$ のときはない。

さて，$f(t)=4t^3-3\sqrt{2}t^2-12t+3\sqrt{2}$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-6\sqrt{2}t-12$$
$$=6(2t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		＋	0	－	0
$f(t)$	$\sqrt{2}$	↗		↘	$-7\sqrt{2}$

すると，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)=0$ すなわち方程式②は $-\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\sqrt{2}$ に解を 1 つだけもつ。

よって，方程式①を満たす x は 2 個存在する。

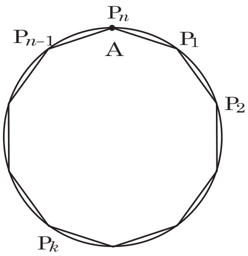
［解 説］

有名な三角方程式の解の個数についての問題です。t と x の個数の対応に注意が必要です。

5

問題のページへ

正 n 角形に頂点をP_1，P_2，…，P_nとし，点 A はP_nとする。このとき, A から A までの一筆がきを, 時計まわりにかき始めた場合を考える。



(i)　折り返し地点がP_k $(1\leqq k\leqq n-1)$のとき

最初, A から時計まわりにかき始めP_kで折り返し A に戻るかき方は$2^k\times 1$通り，続いて残りの経路を A から反時計まわりにかき始めP_kで折り返し A に戻るかき方は$2^{n-k}\times 1$通りある。これより，各P_kに対して，$2^k\times 2^{n-k}=2^n$通りずつのかき方がある。

(ii)　折り返し地点がP_nのとき

最初, A から時計まわりにかき始め 1 回転して A に戻るかき方は2^n通り，続いて残りの経路を反時計まわりに 1 回転するかき方は 1 通り。これより，$2^n\times 1=2^n$通りのかき方がある。

(iii) 折り返し地点がないとき

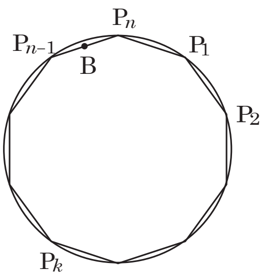
最初, A から時計まわりにかき始め 1 回転して A に戻るかき方は2^n通り，さらに残りの経路を時計まわりに 1 回転するかき方は 1 通り。これより，$2^n\times 1=2^n$通りのかき方がある。

(i)～(iii)より，$(n-1)\times 2^n+2^n+2^n=(n+1)2^n$通りとなる。

また, 反時計まわりにかき始めた場合も同様に$(n+1)2^n$通りなので,

$$a=(n+1)2^n\times 2=(n+1)2^{n+1}$$

次に，点 B を辺$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$の中点とする。このとき, B から B までの一筆がきを, B→P_nとかき始め，P_{n-1}→B で終わる場合を考える。



(iv) 折り返し地点がP_k $(1\leqq k\leqq n-2)$のとき

B からP_n，さらに時計まわりに進みP_kで折り返しP_nに戻る B→$\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_k\to\mathrm{P}_n$のかき方は$1\times 2^k\times 1$通り，反時計まわりに$\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_{n-1}$のかき方は 1 通り，さらに残りの経路を$\mathrm{P}_{n-1}$から反時計まわりに進み$\mathrm{P}_k$で折り返し B に戻る$\mathrm{P}_{n-1}\to\mathrm{P}_k\to\mathrm{P}_{n-1}$→B のかき方は$2^{n-k-1}\times 1\times 1$通りである。これより，各$\mathrm{P}_k$に対して，$2^k\times 2^{n-k-1}=2^{n-1}$通りずつのかき方がある。

(v)　折り返し地点がP_{n-1}のとき

B からP_n，さらにP_nから時計まわりに進みP_{n-1}で折り返しP_nに戻る B→$\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_{n-1}\to\mathrm{P}_n$のかき方は$1\times 2^{n-1}\times 1$通り，反時計まわりに$\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_{n-1}$のかき方は 1 通り，さらに$\mathrm{P}_{n-1}$→B のかき方は 1 通りである。これより，$2^{n-1}$通りのかき方がある。

(vi) 折り返し地点がP_nのとき

B から P_n，さらに P_n から反時計まわり P_{n-1} に至る $\mathrm{B}\to\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_{n-1}$ のかき方は 1×1 通り，P_{n-1} から反時計まわりに進み P_n で折り返し P_{n-1} に戻る $\mathrm{P}_{n-1}\to\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_{n-1}$ のかき方は $2^{n-1}\times1$ 通り，さらに $\mathrm{P}_{n-1}\to\mathrm{B}$ のかき方は 1 通りである。これより，2^{n-1} 通りのかき方がある。

(vii) 折り返し地点がないとき

B から P_n，さらに P_n から時計まわりに進み P_{n-1} に至る $\mathrm{B}\to\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_{n-1}$ のかき方は $1\times2^{n-1}$ 通り，さらに残りの経路を時計まわりに進み B に戻る $\mathrm{P}_{n-1}\to\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_{n-1}\to\mathrm{B}$ のかき方は $1\times1\times1$ 通りである。これより，2^{n-1} 通りのかき方がある。

(iv)～(vii)より，$(n-2)\times2^{n-1}+2^{n-1}+2^{n-1}+2^{n-1}=(n+1)2^{n-1}$ 通りとなる。

また, $\mathrm{B}\to\mathrm{P}_{n-1}$ とかき始め，$\mathrm{P}_n\to\mathrm{B}$ で終わる場合も同様に $(n+1)2^{n-1}$ 通りなので,

$$b=(n+1)2^{n-1}\times2=(n+1)2^n$$

［解 説］

大学入試ではあまり見かけない一筆がきを題材にした問題です。折り返し地点をどこにするかで場合分けをしています。