1

解答解説のページへ

直線 $y = px + q$ が関数 $y = \log x$ のグラフと共有点をもたないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ。

2

解答解説のページへ

正四面体 ABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し，1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする。このとき，時刻 0 から時刻 n までの間に，4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ。ただし，n は 1 以上の整数とする。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

空間の 1 点 O を通る 4 直線で, どの 3 直線も同一平面上にないようなものを考える。このとき, 4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で, 4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ。

4　解答解説のページへ

定数 a は実数であるとする。関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点はいくつあるか。a の値によって分類せよ。

5　　解答解説のページへ

次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える。

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ \ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面のうち，点$(0,\ 2,\ 1)$を通るものを H とする。円柱 C を平面 H で 2 つに分けるとき，点$(0,\ 2,\ 0)$を含む方の体積を求めよ。

6

解答解説のページへ

地球上の北緯 60° 東経 135° の地点を A，北緯 60° 東経 75° の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1，R_2 を考える。R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。

$\boxed{1}$

問題のページへ

$y=px+q$ ……①と $y=\log x$ ……②を連立して，

$$\log x-px-q=0 \quad (x>0) \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②のグラフが共有点をもたない条件は，③が実数解をもたないことである。

さて，$f(x)=\log x-px-q$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-p$$

(i)　$p\leqq 0$ のとき

$f'(x)>0$ となり，$f(x)$ は $x>0$ で単調に増加し，

$$\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

よって，$f(x)=0$ は実数解を 1 つもつので，不適である。

(ii)　$p>0$ のとき

$f'(x)=0$ の解は $x=\dfrac{1}{p}$ となり，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

すると，$\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$ より，$f(x)=0$ が実数解をもたない条件は，

$$f\left(\frac{1}{p}\right)=-\log p-1-q<0,\ \log p+q+1>0$$

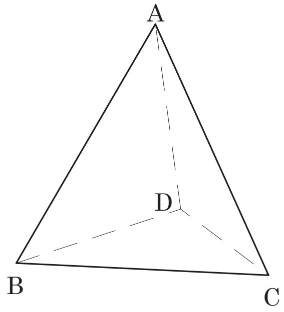
(i)(ii)より，求める共有点をもたない条件は，$p>0$ かつ $\log p+q+1>0$ である。

［解 説］

微分法の方程式への応用についての基本問題です。

2

問題のページへ



時刻 0 から n までの間に，4 頂点のすべてに点 P が現れる確率を $P(n)$ とする。

まず，明らかに，$P(1)=P(2)=0$ である。

次に，$n \geqq 3$ のときを考える。

点 P が A と B，A と C，A と D の 2 頂点のみに現れる確率は，いずれも $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。

また，点 P が A，B，C の 3 頂点のみに現れる確率は，$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ であるが，そのすべてに現れるのは，A，B のみ，A，C のみに現れる場合を除いて，$\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ となる。

さらに，A, C, D の 3 頂点，A, D, B の 3 頂点の場合も同じ確率である。

これより，4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は，余事象を考えて，

$$P(n)=1-3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-3\left(\frac{1}{3}\right)^n=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

なお，この式は，$n=1$，2 のときも成立している。

［解 説］

確率の基本問題です。余事象を考えるところがポイントです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

1 点 O を通る 3 直線の方向ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とすると，3 直線が同一平面上にないことより，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立である。

さらに，もう 1 本の直線の方向ベクトルを $\vec{d}$ とすると，どの 3 直線も同一平面上にないことより，r, s, t を 0 以外の実数として，

$$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，ここで，次のように点 A, B, C, D を決める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -s\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d} \cdots\cdots\cdots ②$$

$r \neq 0$，$s \neq 0$，$t \neq 0$ から, A, B, C, D は O と異なり，①②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d} - r\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} = t\vec{c} - (-s\vec{b}) = s\vec{b} + t\vec{c}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \neq \vec{0}$ となり，四角形 ABCD は平行四辺形である。

［解 説］

空間図形の問題ですが，誘導がないので，状況の設定から自分でしなくてはいけません。なお，②の関係式は，いきなり見つけたものではなく，予め方程式を立て計算した結果を書き直したものです。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

$y=|x^2-2|$……①と $y=|2x^2+ax-1|$……②を連立して，

$$|x^2-2|=|2x^2+ax-1|,\ \pm(x^2-2)=2x^2+ax-1$$

これより，$x^2+ax+1=0$……③ または $3x^2+ax-3=0$……④

③より $ax=-x^2-1$，④より $ax=-3x^2+3$

すると，①と②のグラフの共有点の個数は，直線 $y=ax$……⑤と $y=-x^2-1$……⑥，$y=-3x^2+3$……⑦の 2 つのグラフの共有点の個数に一致する。

さて，⑥と⑦の交点は，

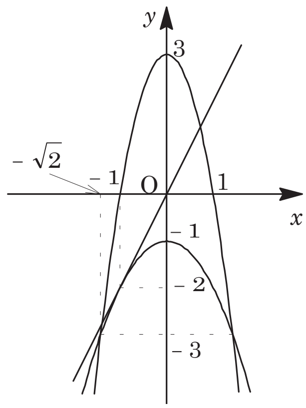
$$-x^2-1=-3x^2+3,\ x=\pm\sqrt{2}$$

よって，$(-\sqrt{2},\ -3)$，$(\sqrt{2},\ -3)$である。

また，⑤と⑥が接するのは，③が重解をもつときより，

$$D=a^2-4=0,\ a=\pm 2$$

このとき，重解は $x=-\dfrac{a}{2}=\mp 1$ であり，接点は $(-1,\ -2)$，$(1,\ -2)$となる。



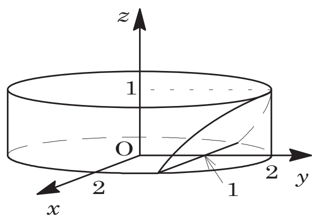
以上より，方程式①の異なる実数解の個数は，対称性に注意すると，右図より，$|a|<2$ のとき 2 個，$|a|=2$ または $|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 3 個，$2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ または $|a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 4 個である。

［解 説］

①と②のグラフの共有点の個数を，⑤と⑥および⑦のグラフの共有点の個数として翻訳し，視覚的にとらえています。文系に相同な問題があり，後半その解を流用しています。

5

問題のページへ



xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面 H の方程式は，

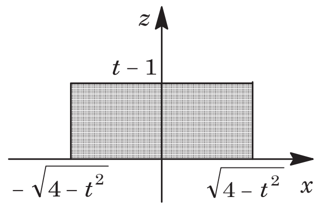
$$z=y-1$$

円柱 C を平面 H で分けた下方の部分を A としたとき，A を表す不等式は，

$$x^2+y^2\leqq 4,\quad 0\leqq z\leqq 1,\quad z\leqq y-1$$

ここで, A を $y=t$ $(1\leqq t\leqq 2)$ で切断したとき，その切り口は，$y=t$ 上で，

$$x^2\leqq 4-t^2,\quad 0\leqq z\leqq 1,\quad z\leqq t-1$$



$1\leqq t\leqq 2$ より，$4-t^2\geqq 0$，$0\leqq t-1\leqq 1$ から，

$$-\sqrt{4-t^2}\leqq x\leqq\sqrt{4-t^2},\quad 0\leqq z\leqq t-1$$

この切り口の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=2(t-1)\sqrt{4-t^2}$$

よって, A の体積を V とすると，

$$V=\int_1^2 S(t)\,dt=\int_1^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\left[-\frac{2}{3}(4-t^2)\sqrt{4-t^2}\,\right]_1^2-2\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

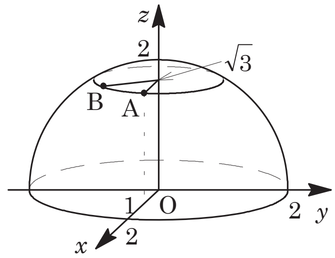
$$=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

［解 説］

非回転体の体積を求める頻出問題です。京大では必須の平面の方程式を利用しています。なお，積分の第 2 項は，半径 2 の円を用いて，面積として計算しています。

6

問題のページへ



まず，地球の半径を 2，赤道面を xy 平面，北極を点 $(0,\ 0,\ 2)$ とし，東経135° を xz 平面上とする座標系を設定する。

すると，地点 A は北緯60°東経135° より，その座標は $A(1,\ 0,\ \sqrt{3})$ となる。また，地点 B は北緯60°東経75° より，$B(x,\ y,\ \sqrt{3})$ とおくと，

$$x = 2\cos 60^\circ \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$y = 2\cos 60^\circ \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，経路 R_1 は，平面 $z=\sqrt{3}$ 上での弧 AB より，その長さを l_1 とおくと，

$$l_1 = 2\pi\cdot 1\times\frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = \frac{30}{90}\pi$$

また，経路 R_2 は，半径 2 の大円上での弧 AB であり，$\angle AOB = \theta^\circ$ とおくと，

$$l_2 = 2\pi\cdot 2\times\frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{90}\theta$$

ここで，$\cos\theta^\circ = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{2\cdot 2} = \dfrac{7}{8} = 0.875$ から，三角関数表を用いると，

$$28^\circ < \theta^\circ < 29^\circ$$

よって，$\dfrac{28}{90}\pi < l_2 < \dfrac{29}{90}\pi$ となり，$\dfrac{l_2}{l_1} < \dfrac{29}{30} < 0.97$ である。

すなわち，R_1 に比べて R_2 は飛行距離が3％以上短くなる。

［解 説］

大圏航路を題材にした問題です。これは，メルカトル図法で書かれた世界地図で，最短の飛行経路が直線としては表されないことと関連しています。なお，与えられていた三角関数表は省略しました。