1

解答解説のページへ

次の各問いにそれぞれ答えよ。

[1]　xyz 空間上の 2 点 $\mathrm{A}(-3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線 l に点 $\mathrm{C}(2,\ 3,\ 3)$ から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

[2]　白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える。取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し，そうでないときは「失敗」とし，取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする。最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていたとき，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ。ただし $n \geqq 2$ とする。

2

解答解説のページへ

整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy + \int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy = x^2 + C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。

3

解答解説のページへ

$x,\ y$ は $x \neq 1$，$y \neq 1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

4

解答解説のページへ

平面上で，鋭角三角形△OAB を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を△OBC，△OBC を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を△OCD，△OCD を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を△ODE とする。△OAB と△OBE の面積比が 2 : 3 のとき，$\sin\angle AOB$ の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

p を素数, n を正の整数とするとき, $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。

$\boxed{1}$

問題のページへ

[1]　$A(-3,\ -1,\ 1)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$ に対し，$\overrightarrow{BA}=(-2,\ -1,\ 1)$ より，直線 l のパラメータ表示は，

$$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 0,\ 0)+t(-2,\ -1,\ 1)=(-1-2t,\ -t,\ t)$$

すると，l 上の点 H は，$H(-1-2t,\ -t,\ t)$ と表せ，点 $C(2,\ 3,\ 3)$ に対し，

$$\overrightarrow{CH}=(-3-2t\quad -3-t,\ -3+t)$$

条件より，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ なので，

$$-2(-3-2t)-(-3-t)+(-3+t)=0,\ 6t+6=0$$

これより $t=-1$ となり，$H(1,\ 1,\ -1)$ である。

[2]　最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていて，失敗すると赤球が 1 個ずつ増えていくので，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を P_n とすると，

$$P_n=\left(1-\frac{1}{{}_3C_2}\right)\left(1-\frac{1}{{}_4C_2}\right)\left(1-\frac{1}{{}_5C_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{{}_{n+1}C_2}\right)\cdot\frac{1}{{}_{n+2}C_2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，k を 3 以上の整数として，

$$1-\frac{1}{{}_kC_2}=1-\frac{2}{k(k-1)}=\frac{k^2-k-2}{k(k-1)}=\frac{(k-2)(k+1)}{(k-1)k}$$

よって，(*)より，

$$P_n=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\cdot\frac{4\cdot7}{5\cdot6}\cdots\cdots\frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n}\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)}=\frac{2}{3n(n+1)}$$

［解 説］

[1]は有名問題です。ピンポイントレクチャーの「空間図形の方程式」で，同じ内容の問題を扱っています。第 1 講の問題 1 を参考にしてください。

2

問題のページへ

まず，$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy = x^2+C$ を変形して，

$$\int_0^x f(y)\,dy + x^2\int_0^1 f(y)\,dy + 2x\int_0^1 yf(y)\,dy + \int_0^1 y^2 f(y)\,dy = x^2 + C$$

$p=\int_0^1 f(y)\,dy$ ……①，$q=\int_0^1 yf(y)\,dy$ ……②，$r=\int_0^1 y^2 f(y)\,dy$ ……③とおくと，

$$\int_0^x f(y)\,dy + px^2 + 2qx + r = x^2 + C \cdots\cdots\cdots ④$$

④の両辺を x で微分すると，$f(x)+2px+2q=2x$

$$f(x) = -2(p-1)x-2q \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④に $x=0$ を代入すると，$r=C$ ………⑥

①⑤より，$p=\int_0^1 \{-2(p-1)y-2q\}\,dy = -p+1-2q$，$2p+2q=1$ ………⑦

②⑤より，$q=\int_0^1 \{-2(p-1)y^2-2qy\}\,dy = -\frac{2}{3}(p-1)-q$，$p+3q=1$ ………⑧

⑦⑧より，$p=q=\frac{1}{4}$ となり，

$$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

③⑥より，$C=\int_0^1 \left(\frac{3}{2}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

［解 説］

定型的な積分方程式の問題です。$f(x)$ を 1 次以下の整式として設定し，与えられた式に代入する方法もあります。

3

問題のページへ

$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$　$(x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1)$ より,

$$\log_x y+\frac{1}{\log_x y}>2+(\log_x 2)\cdot\frac{\log_x 2}{\log_x y}$$

(i)　$\log_x y>0$ $(x>1,\ y>1$ または $0<x<1,\ 0<y<1)$ のとき

$(\log_x y)^2+1>2\log_x y+(\log_x 2)^2$，$(\log_x y-1)^2-(\log_x 2)^2>0$ より,

$$(\log_x y-1-\log_x 2)(\log_x y-1+\log_x 2)>0,\ \log_x\frac{y}{2x}\cdot\log_x\frac{2y}{x}>0$$

(i-i)　$\log_x\frac{y}{2x}>0$ かつ $\log_x\frac{2y}{x}>0$ のとき

$x>1$ では，$\frac{y}{2x}>1$ かつ $\frac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\frac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\frac{y}{2x}<1$ かつ $0<\frac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\frac{1}{2}x$

(i-ii)　$\log_x\frac{y}{2x}<0$ かつ $\log_x\frac{2y}{x}<0$ のとき

$x>1$ では，$0<\frac{y}{2x}<1$ かつ $0<\frac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\frac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\frac{y}{2x}>1$ かつ $\frac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\frac{1}{2}x$

(ii)　$\log_x y<0$ $(x>1,\ 0<y<1$ または $0<x<1,\ y>1)$ のとき

$(\log_x y)^2+1<2\log_x y+(\log_x 2)^2$ より，$\log_x\frac{y}{2x}\cdot\log_x\frac{2y}{x}<0$

(ii-i)　$\log_x\frac{y}{2x}>0$ かつ $\log_x\frac{2y}{x}<0$ のとき

$x>1$ では，$\frac{y}{2x}>1$ かつ $0<\frac{2y}{x}<1$ より，$y>2x$，$0<y<\frac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\frac{y}{2x}<1$ かつ $\frac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\frac{1}{2}x$

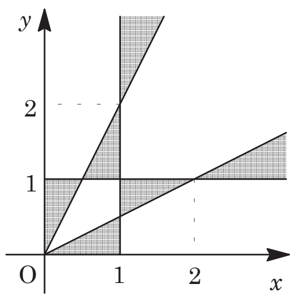
(ii-ii)　$\log_x\frac{y}{2x}<0$ かつ $\log_x\frac{2y}{x}>0$ のとき

$x>1$ では，$0<\frac{y}{2x}<1$ かつ $\frac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\frac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\frac{y}{2x}>1$ かつ $0<\frac{2y}{x}<1$ より,

$y>2x$，$0<y<\frac{1}{2}x$

以上より，$(x,\ y)$ の満たす範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



［解 説］

頻出タイプの問題です。丁寧に場合分けをして記述しました。

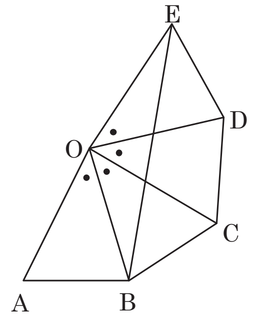
4

問題のページへ

$\angle AOB=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta$

また，題意より，$OA=OC=OE$，$OB=OD$

(i)　$0<3\theta\leqq\pi\ \left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$のとき



$$\triangle OBE=\frac{1}{2}OB\cdot OE\sin 3\theta=\frac{1}{2}OB\cdot OA\sin 3\theta$$

ここで，$\triangle OAB:\triangle OBE=2:3$より，

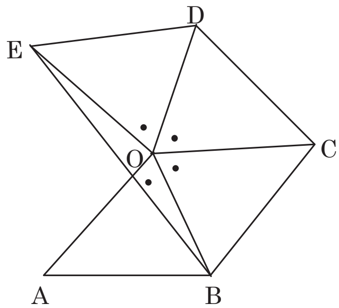
$\sin\theta:\sin 3\theta=2:3$，$2\sin 3\theta-3\sin\theta=0$

$2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-3\sin\theta=0$

$8\sin^3\theta-3\sin\theta=0$

$0<\sin\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(ii)　$\pi<3\theta\ \left(\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき



$$\triangle OBE=\frac{1}{2}OB\cdot OE\sin(2\pi-3\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}OB\cdot OA\sin 3\theta$$

ここで，$\triangle OAB:\triangle OBE=2:3$より，

$\sin\theta:(-\sin 3\theta)=2:3$

$2\sin 3\theta+3\sin\theta=0$，$8\sin^3\theta-9\sin\theta=0$

すると，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$より，適する$\sin\theta$の値は存在しない。

(i)(ii)より，$\sin\angle AOB=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

［解 説］

図を描いて場合分けをしましたが，絶対値を用いると，場合分けが回避できます。

5

問題のページへ

p を素数, n を正の整数とするとき, $(p^n)!$ は,

$$(p^n)! = 1\times2\times\cdots\times p\times\cdots\times p^2\times\cdots\times p^3\times\cdots\cdots\times p^n$$

さて, 1 から p^n までの整数で, $p^k\ (1\leqq k\leqq n)$ の倍数は $\dfrac{p^n}{p^k} = p^{n-k}$ 個ある。すなわち, p の倍数は p^{n-1} 個, p^2 の倍数は p^{n-2} 個, …, p^{n-1} の倍数は p 個, p^n の倍数は 1 個となる。

すると, $(p^n)!$ を素因数分解したとき, p の個数は,

$$p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p-1}$$

したがって, $(p^n)!$ は p で $\dfrac{p^n-1}{p-1}$ 回割り切れる。

［解 説］

$p=3$, $n=4$ の場合を具体的に考え, 実験をしました。その結果を一般化したのが, 上の解です。