1

解答解説のページへ

xyz 空間で O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(3,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 2,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 4)$，E$(3,\ 0,\ 4)$，F$(3,\ 2,\ 4)$，G$(0,\ 2,\ 4)$を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。辺 AE を$s:1-s$に内分する点を P, 辺 CG を$t:1-t$に内分する点を Q とおく。ただし, $0<s<1$, $0<t<1$ とする。D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC(両端を含む)と交わるような s, t の満たす条件を求めよ。

2

解答解説のページへ

平面上の鋭角三角形△ABC の内部(辺や頂点は含まない)に点 P をとり，A′ を B, C, P を通る円の中心，B′ を C, A, P を通る円の中心，C′ を A, B, P を通る円の中心とする。このとき，A，B，C，A′，B′，C′ が同一円周上にあるための必要十分条件は P が△ABC の内心に一致することであることを示せ。

3

解答解説のページへ

n 枚のカードを積んだ山があり，各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geqq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では，一番上のカードを取り，山の一番上にもどすか，あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。n 回の試行を終えたとき，最初一番下にあったカード(番号 n)が山の一番上にきている確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を$ad-bc=1$を満たす行列とする($a$，$b$，$c$，$d$は実数)。自然数$n$に対して平面上の点$\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定める。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$と$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$の長さが 1 のとき，すべての$n$に対して$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$の長さが 1 であることを示せ。ここで O は原点である。

5　解答解説のページへ

xy 平面上で原点を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して, 極方程式

$$r = 2 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

により表される曲線を C とする。C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

a と b を互いに素，すなわち 1 以外の公約数をもたない正の整数とし，さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n，b_n を

$$(a+b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たすように定めるとき，次の(1)，(2)を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(1)　a_2 は奇数であり，a_2 と b_2 は互いに素である。

(2)　すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素である。

1

問題のページへ

AP : PE $= s : 1-s$，CB : BG $= t : 1-t$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

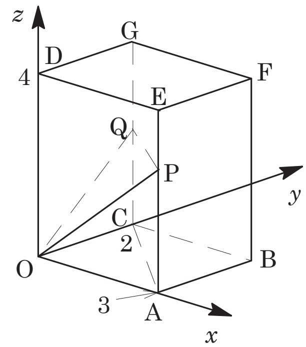
$= s(3,\ 0,\ 4) + (1-s)(3,\ 0,\ 0)$

$= (3,\ 0,\ 4s)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{OG}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$= t(0,\ 2,\ 4) + (1-t)(0,\ 2,\ 0)$

$= (0,\ 2,\ 4t)$



平面 OPQ の法線ベクトルを $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3a + 4sc = 0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2b + 4tc = 0$

これより，$a = -\dfrac{4}{3}sc$，$b = -2tc$ となり，$\vec{n} = \left(-\dfrac{4}{3}sc,\ -2tc,\ c\right) = -\dfrac{c}{3}(4s,\ 6t,\ -3)$

すると，点 D を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ直線は，k を実数として，

$(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 4) + k(4s,\ 6t,\ -3) = (4sk,\ 6tk,\ 4-3k)$

xy 平面との交点は，$z = 4-3k = 0$ から $k = \dfrac{4}{3}$ となり，$(x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{16}{3}s,\ 8t,\ 0\right)$

さて，線分 AC 上(両端を含む)の点は，$0 \leqq l \leqq 1$ として，

$(x,\ y,\ z) = l(3,\ 0,\ 0) + (1-l)(0,\ 2,\ 0) = (3l,\ 2-2l,\ 0)$

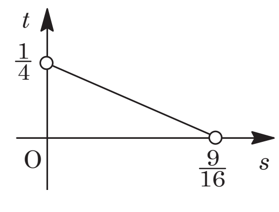
ここで，条件より，$\left(\dfrac{16}{3}s,\ 8t,\ 0\right) = (3l,\ 2-2l,\ 0)$ となり，

$\dfrac{16}{3}s = 3l$ ………①，$8t = 2-2l$ ………②

①②より，$\dfrac{32}{5}s + 24t = 6$ となり，$16s + 36t = 9$

また，$0 \leqq l \leqq 1$ から $0 \leqq 8t \leqq 2$ となり，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}$

さらに，$0 < t < 1$，$0 < s < 1$ と合わせると，$0 < t < \dfrac{1}{4}$ である。

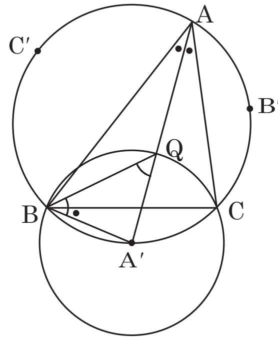


［解 説］

空間ベクトルの頻出題で，計算量も少なめです。

2

問題のページへ



点 A′, B′, C′ が△ABC の外接円上の点であるとき，条件より，点 A′，B′，C′ は，それぞれ劣弧 BC, CA, AB の中点である。

まず，A′B = A′C から，∠A′AB = ∠A′AC ………①

さて，点 A′ を中心とし，B, C を通る円と線分 AA′ との交点を Q とすると，A′B = A′Q より，

$$\angle A'QB = \angle A'BQ \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，∠A′AC = ∠A′BC から，①②より，

$$\angle ABQ = \angle A'QB - \angle A'AB = \angle A'BQ - \angle A'AC = \angle A'BQ - \angle A'BC = \angle CBQ$$

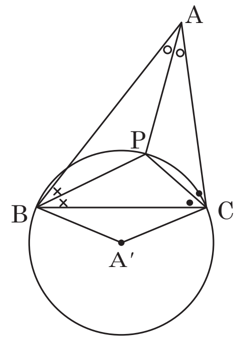
これより，BQ は∠ABC の二等分線となり，点 Q は△ABC の内心に一致する。すなわち，点 A′ を中心とし B, C を通る円は，△ABC の内心を通る。

同様にすると，点 B′ を中心とし C, A を通る円，点 C′ を中心とし A, B を通る円も，それぞれ△ABC の内心を通る。

よって，A′，B′，C′ を中心とする 3 つの円が 1 点を共有するとき，その個数は高々1 個であり，この点を P とすると，点 P は△ABC の内心に一致する。

逆に，点 P が△ABC の内心であるとき，点 A′ を中心とし B, C を通る円において，

$$\angle BA'C = 360° - 2\angle BPC \cdots\cdots\cdots ③$$



点 P は，△ABC の内心であることより，

$$\begin{aligned}\angle BPC &= 180° - (\angle PBC + \angle PCB)\\ &= 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)\\ &= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BAC)\\ &= 90° + \frac{1}{2}\angle BAC \cdots\cdots\cdots ④\end{aligned}$$

③④より，$\angle BA'C = 360° - 2\left(90° + \frac{1}{2}\angle BAC\right) = 180° - \angle BAC$

よって，点 A′ は△ABC の外接円上の点である。

同様にすると，点 B′，C′ も△ABC の外接円上の点となり，6 点 A, B, C, A′，B′，C′ は同一円周上にある。

以上より，A, B, C, A′, B′, C′ が同一円周上にあるための必要十分条件は，P が△ABC の内心に一致することである。

［解 説］

前半の証明が難です。内心と外接円についての有名な問題を下敷きとしています。

3

問題のページへ

n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にあるためには，$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上または上から二番目でなくていはいけない。

(i)　$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上にあるとき

$n-1$ 回目までの試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどし，n 回目の試行では，番号 n のカードを山の一番上にもどすことより，その確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}$$

(ii)　$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが上から二番目にあるとき

$1\leqq k\leqq n-1$ として，k 回目の試行で，一番上のカードを番号 n のカードより上にもどし，それ以外の試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどす。このときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdots\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}=\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}$$

(i)(ii)より，n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にある確率 P は，

$$P=\frac{(n-1)!}{n^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\right\}$$
$$=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{l=1}^{n-1}l\right\}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\frac{1}{2}(n-1)n\right\}=\frac{(n^2-n+2)(n-1)!}{2n^n}$$

［解 説］

題意を把握するために，$n=5$ の場合を具体的に考えました。その部分は，上の解からは省いていますが。

4

問題のページへ

条件より，$ad-bc=1$ ……①であり，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc \\ ac+cd \end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}|=1$ から，

$$a^2+c^2=1 \text{ ………②},\ (a^2+bc)^2+c^2(a+d)^2=1 \text{ ………③}$$

①②を③に代入して，$(a^2+ad-1)^2+(1-a^2)(a+d)^2=1$

$$a^2(a+d)^2-2a(a+d)+1+(1-a^2)(a+d)^2=1,\ (a+d)^2-2a(a+d)=0$$

すると，$(a+d)(-a+d)=0$ から，$a+d=0$ または $d=a$

(i)　$a+d=0$ のとき

ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2=-E$（E は単位行列）となり，

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|$ から，n が偶数のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}|=1$，$n$ が奇数のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}|=1$ となる。

(ii)　$d=a$ のとき

①より $a^2-bc=1$ となり，②に代入すると $c(c+b)=0$ から，$c=0$ または $b=-c$

(ii-i)　$c=0$ のとき　$a=\pm1$ から，$A=\begin{pmatrix} \pm1 & b \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}$ となる。以下，複号同順で，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm1 & b \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm1 & b \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより，帰納的に，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}|=1$

(ii-i)　$b=-c$ のとき　$A=\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ となり，$a^2+c^2=1$ である。

すると，$a=\cos\theta$，$c=\sin\theta$ となる θ が存在し，

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ A^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

これより，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|=1$

(i)(ii)より，すべての n に対して $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|=1$ である。

［解 説］

①～③の連立方程式を変形する際は，トレース $a+d$ の条件に注目をしています。

5

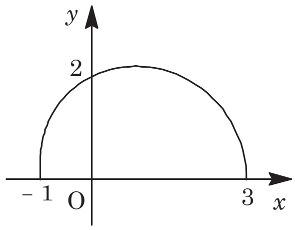
問題のページへ

曲線 C: $r=2+\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$ に対して,

$$x=(2+\cos\theta)\cos\theta\,,\quad y=(2+\cos\theta)\sin\theta$$

ここで, $\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta-(2+\cos\theta)\sin\theta$

$$=-2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$$



すると, C と x 軸とで囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V は,

$$V=\int_{-1}^{3}\pi y^2dx=\pi\int_{\pi}^{0}(2+\cos\theta)^2\sin^2\theta(-2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$=2\pi\int_{0}^{\pi}(2+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

ここで, $t=\cos\theta$ とおくと, $\dfrac{dt}{d\theta}=-\sin\theta$ から,

$$V=2\pi\int_{1}^{-1}(2+t)^2(1-t^2)(1+t)(-dt)=2\pi\int_{-1}^{1}(2+t)^2(1-t^2)(1+t)\,dt$$

$$=4\pi\int_{0}^{1}(4+t^2-5t^4)\,dt=4\pi\left(4+\frac{1}{3}-1\right)=\frac{40}{3}\pi$$

[解 説]

2 倍角や半角などの公式を用いて次数下げをした後, 積分を実行した方がよいかどうか, 迷うところです。ところが, 本問では, それが不要でした。

6

問題のページへ

(1)　条件より，$a_2+b_2\sqrt{2}=(a+b\sqrt{2})^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$ となり，

$$a_2=a^2+2b^2\cdots\cdots\cdots①,\quad b_2=2ab\cdots\cdots\cdots②$$

a は奇数から a^2 も奇数となり，①より a_2 は奇数である。

ここで，a_2 と b_2 は互いに素でないと仮定すると，a_2 と b_2 はともに 3 以上の素因数 g をもつことになり，①②より, j, l を整数として,

$$a^2+2b^2=gj\cdots\cdots\cdots③,\quad 2ab=gl\cdots\cdots\cdots④$$

③より $2a^4+4a^2b^2=2a^2gj$，④より $4a^2b^2=g^2l^2$ となり，

$$2a^4+g^2l^2=2a^2gj,\quad 2a^4=g(2a^2j-gl^2)$$

g は 3 以上の素数より，a^4 は g を約数にもち，すなわち a は g を約数にもつ。

また，同様にして，③より $4a^2b^2+8b^4=4b^2gj$ となり，

$$g^2l^2+8b^4=4b^2gj,\quad 8b^4=g(4b^2j-gl^2)$$

g は 3 以上の素数より，b^4 は g を約数にもち，すなわち b は g を約数にもつ。

これは, a と b が互いに素であるという条件に反する。

したがって，a_2 と b_2 は互いに素である。

(2)　条件より，$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a+b\sqrt{2})^{n+1}=(a+b\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})$ なので,

$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(aa_n+2bb_n)+(ba_n+ab_n)\sqrt{2}$$

$$a_{n+1}=aa_n+2bb_n\cdots\cdots\cdots⑤,\quad b_{n+1}=ba_n+ab_n\cdots\cdots\cdots⑥$$

以下，すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a_1=a$，$b_1=b$ から，明らかに成立している。

(ii)　$n=k$ のとき

a_k は奇数であり，a_k と b_k は互いに素であると仮定する。

まず，⑤より $a_{k+1}=aa_k+2bb_k$ となり, a は奇数から a_{k+1} も奇数である。

ここで，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素でないとすると，a_{k+1} と b_{k+1} はともに 3 以上の素因数 g をもつことになり，⑤⑥より，j_k，l_k を整数として,

$$aa_k+2bb_k=gj_k\cdots\cdots\cdots⑦,\quad ba_k+ab_k=gl_k\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より，$(a^2-2b^2)a_k=g(aj_k-2bl_k)$，$(a^2-2b^2)b_k=g(al_k-bj_k)$

a_k と b_k は互いに素であることから，a^2-2b^2 は 3 以上の素因数 g をもつ。

さて，⑤⑥より，$a_{k+1}-2aa_k+(a^2-2b^2)a_{k-1}=0$

$$2aa_k=a_{k+1}-(a^2-2b^2)a_{k-1}\cdots\cdots\cdots⑨$$

同様に，⑤⑥より，$b_{k+1}-2ab_k+(a^2-2b^2)b_{k-1}=0$

$$2ab_k=b_{k+1}-(a^2-2b^2)b_{k-1}\cdots\cdots\cdots⑩$$

すると，a_{k+1}，b_{k+1}，a^2-2b^2 は 3 以上の素因数 g をもつので，⑨⑩から，$2aa_k$，$2ab_k$ は素因数 g をもつ。さらに，a_k と b_k は互いに素なので, a は素因数 g をもつ。

そこで，a^2-2b^2 は 3 以上の素因数 g をもつことから, b も素因数 g をもつことになり, a と b が互いに素であるという条件に反する。

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より，すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素である。

［解 説］

(2)は(1)と同じように進めていますが，後半が難です。連立漸化式と隣接 3 項間型の漸化式の関係については「ピンポイントレクチャー」で掠る程度に触れています。