**1**

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

[1]　辺 AB, 辺 BC, 辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える。$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

[2]　箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を $X$ とする。これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を $Y$ とする。$X=Y$ である確率を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

四面体 OABC において，点 O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

実数 $a$ が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか。$a$ の値によって分類せよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$xy$ 平面上で，連立不等式

$$|x| \leqq 2,\ \ y \geqq x,\ \ y \leqq \left|\frac{3}{4}x^2 - 3\right| - 2$$

を満たす領域の面積を求めよ。

**5**

解答解説のページへ

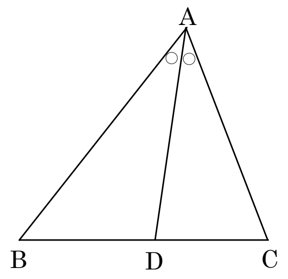
0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ。ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする。また $n$ は正の整数とする。

(1)　各桁の数が 1 または 2 である $n$ 桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を $T_n$ とする。$T_n$ を $n$ を用いて表せ。

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである $n$ 桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を $S_n$ とする。$S_n$ が $T_n$ の 15 倍以上になるのは，$n$ がいくつ以上のときか。必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$ および $0.477<\log_{10}3<0.478$ を用いてもよい。

**1**

問題のページへ




[1]　△ABC に余弦定理を適用すると，

$$\cos B=\frac{12^2+11^2-10^2}{2\cdot12\cdot11}=\frac{5}{8}$$

また，AD は∠BAC の二等分線より，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=6:5$$

すると，$\mathrm{BD}=\dfrac{6}{6+5}\times11=6$ となり，△ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2=12^2+6^2-2\cdot12\cdot6\cos B=144+36-90=90$$

よって，$\mathrm{AD}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

[2]　1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードから，2 枚のカードを同時に選ぶとき，小さい方の数が $k$ であるのは，大きい方の数が $k+1$ 以上のときなので，$9-k$ 通りの場合がある。

これより，$1\leqq k\leqq 8$ のとき，$X=Y=k$ である確率 $P(k)$ は，

$$P(k)=\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{(9-k)^2}{36^2}$$

よって，$X=Y$ である確率は，

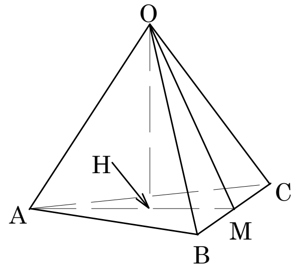
$$\sum_{k=1}^{8}P(k)=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}k^2=\frac{1}{36^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot8\cdot9\cdot17=\frac{17}{108}$$

［解　説］

両問とも，参考書に例題として載っている典型問題です。

**2**

問題のページへ




条件より，$|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=3$………①

また，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$より，$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$となり，

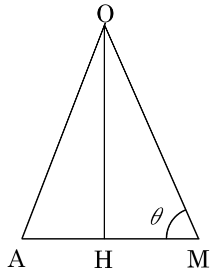
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

よって，①から，$|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$となり

$$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，①と$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$より，△OBC は直角二等辺三角形なので，$|\overrightarrow{BC}|=3\sqrt{2}$………③

さて，辺 BC の中点を M とすると，①より$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$，②より$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$であり，点 O から AM に下ろした垂線の足を$\mathrm{H}'$とすると，$\mathrm{OH}'$は 3 点 A, B, C を含む平面に垂直となる。すなわち，点$\mathrm{H}'$は点 H に一致する。




そこで，①③より，$\mathrm{OM}=3\cos 45^\circ=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

②③より，$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

すると，$\angle\mathrm{OMA}=\theta$とおくと，余弦定理から，

$$4=\frac{9}{2}+\frac{5}{2}-2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ \ 3\sqrt{5}\cos\theta=3$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$から，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$となり，

$$|\overrightarrow{OH}|=\mathrm{OM}\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

［解　説］

空間ベクトルで表現された問題ですが，途中から，三角比の知識をもとに解きました。それは，四面体の対称性に着目したためです。

**３**

問題のページへ

曲線 $y=x^3-4x^2+6x$ ……①と直線 $y=x+a$ ……②の式を連立して，

$$x^3-4x^2+6x=x+a,\ \ x^3-4x^2+5x=a\ \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，①②の共有点の個数は，③の異なる実数解の個数に一致する。

さらに，③を，$y=x^3-4x^2+5x$ ……④と $y=a$ ……⑤を連立した式とみると，③の異なる実数解の個数は，曲線④と直線⑤の共有点の個数に一致する。

④より，$y'=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$

これより，曲線④の増減は右表のようになり，曲線④と $x$ 軸に平行な直線⑤の共有点の個数，すなわち曲線①と直線②の共有点の個数は以下のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $\frac{50}{27}$ | $\nearrow$ |

(i)　$a<\dfrac{50}{27}$，$2<a$ のとき　共有点は 1 個

(ii)　$a=\dfrac{50}{27}$，$a=2$ のとき　共有点は 2 個

(iii)　$\dfrac{50}{27}<a<2$ のとき　共有点は 3 個

［解 説］

問題文が「交点」の個数ですが，接点も交点として数えています。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

与えられた不等式$|x|\leqq 2$ ……①，$y\geqq x$ ……②，$y\leqq\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ ……③に対して，

①より，$-2\leqq x\leqq 2$

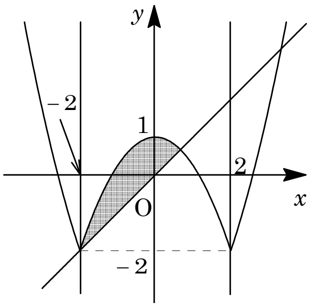
③は，$y\leqq\dfrac{3}{4}|x^2-4|-2$ となり，その領域の境界線 $y=\dfrac{3}{4}|x^2-4|-2$ は，

(i)　$x\leqq -2$，$2\leqq x$ のとき

$$y=\frac{3}{4}(x^2-4)-2=\frac{3}{4}x^2-5$$

(ii)　$-2\leqq x\leqq 2$ のとき

$$y=-\frac{3}{4}(x^2-4)-2=-\frac{3}{4}x^2+1$$




以上より，連立不等式①②③を満たす領域は右図の網点部となる。

さて，$-2\leqq x\leqq 2$ において，②の領域の境界線 $y=x$ と③の境界線 $y=-\dfrac{3}{4}x^2+1$ を連立すると，

$$x=-\frac{3}{4}x^2+1,\ 3x^2+4x-4=0,\ (x+2)(3x-2)=0$$

よって，$x=-2,\ \dfrac{2}{3}$ となり，網点部の面積 $S$ は，

$$S=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2+1-x\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}+2\right)^3=\frac{64}{27}$$

［解　説］

一見，難しそうな連立不等式ですが，見掛け倒しでした。

**5**

問題のページへ

(1) 各桁の数が 1 または 2 である $n$ 桁の整数は，全部で $2^n$ 個あり，これらの整数全体について，どの位にも 1 が $2^{n-1}$ 個，2 が $2^{n-1}$ 個だけ現れる。これより，すべての整数の和 $T_n$ は，

$$T_n=(1+2)\times 2^{n-1}\times 10^{n-1}+(1+2)\times 2^{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+(1+2)\times 2^{n-1}$$
$$=3\cdot 2^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)$$
$$=3\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}(10^n-1)$$

(2) 各桁の数が 0，1，2 のいずれかである $n$ 桁以下の整数は，全部で $3^n$ 個あり，これらの整数全体について，どの位にも 0 が $3^{n-1}$ 個，1 が $3^{n-1}$ 個，2 が $3^{n-1}$ 個だけ現れる。これより，すべての整数の和 $S_n$ は，

$$S_n=(1+2)\times 3^{n-1}\times 10^{n-1}+(1+2)\times 3^{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+(1+2)\times 3^{n-1}$$
$$=3\cdot 3^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)$$
$$=3^n\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=3^{n-2}(10^n-1)$$

さて，条件より，$S_n\geqq 15T_n$ なので，$3^{n-2}(10^n-1)\geqq 5\cdot 2^{n-1}(10^n-1)$ となり，

$$3^{n-2}\geqq 10\cdot 2^{n-2},\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\geqq 10$$

両辺の対数をとって，

$$(n-2)(\log_{10}3-\log_{10}2)\geqq 1,\quad n-2\geqq\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}$$

ここで，$0.175=0.477-0.302<\log_{10}3-\log_{10}2<0.478-0.301=0.177$ から，

$$5.6<\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}<5.8$$

よって，$n$ は整数から，$n\geqq 8$ である。

［解 説］

経験がなくても，具体的に考えていけば，$T_n$ や $S_n$ は求めることができます。後半の対数計算も基本的です。