

1

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

- [1] 箱の中に、1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし、異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び、小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して、再び 2 枚のカードを同時に選び、小さい方の数を Y とする。 $X = Y$ である確率を求めよ。

- [2] 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2} dx$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b, c を実数とし, O を原点とする座標平面上において, 行列 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を T とする。この 1 次変換 T が 2 つの条件

- (i) 点 $(1, 2)$ を点 $(1, 2)$ に移す
- (ii) 点 $(1, 0)$ と点 $(0, 1)$ が T によって点 A, B にそれぞれ移るとき, $\triangle OAB$ の面積が $\frac{1}{2}$ である

を満たすとき, a, b, c を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上で、 $y = x$ のグラフと $y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

n は 2 以上の整数であり, $\frac{1}{2} < a_j < 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) であるとき, 不等式

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \right)$$

が成立することを示せ。

5

解答解説のページへ

xyz 空間で、原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し、点 (x, y, z) がその共有点全体の集合を動くとき、積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。

6

解答解説のページへ

空間内に四面体 $ABCD$ を考える。このとき、4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ。

1

問題のページへ

[1] 1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードから、2 枚のカードを同時に選ぶとき、小さい方の数が k であるのは、大きい方の数が $k+1$ 以上のときなので、 $9-k$ 通りの場合がある。

これより、 $1 \leq k \leq 8$ のとき、 $X = Y = k$ である確率 $P(k)$ は、

$$P(k) = \frac{9-k}{9C_2} \times \frac{9-k}{9C_2} = \frac{(9-k)^2}{36^2}$$

よって、 $X = Y$ である確率は、

$$\sum_{k=1}^8 P(k) = \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^8 (9-k)^2 = \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^8 k^2 = \frac{1}{36^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 = \frac{17}{108}$$

[2] $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x^2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x^2} dx$ とする。

$1-2x^2 = t$ とおくと、 $-4x dx = dt$ となり、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x^2} dx &= -\frac{1}{4} \int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} [t\sqrt{t}]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{24} \end{aligned}$$

$\sqrt{2}x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと、 $\sqrt{2} dx = \cos \theta d\theta$ となり、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi + \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

よって、 $I = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{\sqrt{2}}{16} \pi + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi + \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{6}$

[解説]

[1]は文系と共通の確率の基本問題です。[2]は定積分の計算問題です。後半は円の面積と関連させてもよいでしょう。

2

問題のページへ

行列 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換 T において、条件(i)より、

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって、 $a+2=1$ ……①、 $b+2c=2$ ……②

T によって、点 $(1, 0)$ は点 $A(a, b)$ に、点 $(0, 1)$ は $B(1, c)$ に移り、条件(ii)より、

$$\frac{1}{2}|ac-b| = \frac{1}{2}, \quad ac-b = \pm 1 \dots\dots\dots ③$$

①より、 $a=-1$ となり、③に代入すると、 $-c-b = \pm 1$ ……④

②④より、 $c=3$ のとき $b=-4$ 、 $c=1$ のとき $b=0$ であるので、

$$(a, b, c) = (-1, -4, 3), (-1, 0, 1)$$

[解説]

1 次変換の定義の理解を確認する問題です。

3

問題のページへ

直線 $y = x$ ……①と $y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2$ のグラフに対して、

(i) $x \leq -2$, $2 \leq x$ のとき

$$y = \frac{3}{4}(x^2 - 4) - 2 = \frac{3}{4}x^2 - 5 \dots\dots\dots②$$

$y = x$ と連立すると、 $x = \frac{3}{4}x^2 - 5$ から、

$$3x^2 - 4x - 20 = 0, (x + 2)(3x - 10) = 0$$

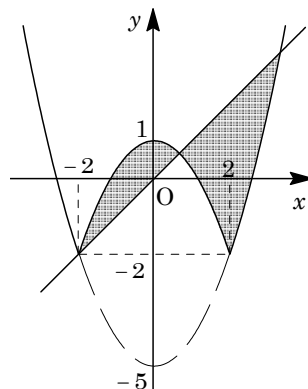
よって、 $x = -2, \frac{10}{3}$ となる。

(ii) $-2 \leq x \leq 2$ のとき

$$y = -\frac{3}{4}(x^2 - 4) - 2 = -\frac{3}{4}x^2 + 1 \dots\dots\dots③$$

$y = x$ と連立すると、 $x = -\frac{3}{4}x^2 + 1$ から、 $3x^2 + 4x - 4 = 0, (x + 2)(3x - 2) = 0$

よって、 $x = -2, \frac{2}{3}$ となる。



さて、直線①と曲線②に囲まれる図形の面積を S_1 とおくと、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2}^{\frac{10}{3}} \left(x - \frac{3}{4}x^2 + 5 \right) dx = -\frac{3}{4} \int_{-2}^{\frac{10}{3}} \left(x - \frac{10}{3} \right) (x + 2) dx \\ &= -\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{6} \right) \left(\frac{10}{3} + 2 \right)^3 = \frac{512}{27} \end{aligned}$$

また、直線①と曲線③に囲まれる図形の面積を S_2 とおくと、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1 - x \right) dx = -\frac{3}{4} \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{2}{3} \right) (x + 2) dx \\ &= -\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{6} \right) \left(\frac{2}{3} + 2 \right)^3 = \frac{64}{27} \end{aligned}$$

さらに、直線 $y = -2$ と曲線③に囲まれる図形の面積を S_3 とおくと、

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{-2}^2 \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1 + 2 \right) dx = -\frac{3}{4} \int_{-2}^2 (x - 2)(x + 2) dx \\ &= -\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{6} \right) (2 + 2)^3 = 8 \end{aligned}$$

以上より、 $y = x$ と $y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2$ のグラフによって囲まれる図形の面積 S は、

$$S = S_1 + 2S_2 - 2S_3 = \frac{512}{27} + \frac{128}{27} - 16 = \frac{208}{27}$$

[解説]

いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式だけで面積計算の可能な有名な頻出問題です。もちろん、普通に計算しても構いません。

4

問題のページへ

$n \geq 2$ のとき, $\frac{1}{2} < a_j < 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) に対して, 不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}}\right) \cdots \cdots (*)$$

が成り立つことを, 以下, 数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n = 2$ のとき $\frac{1}{2} < a_1 < 1$, $\frac{1}{2} < a_2 < 1$ に対して,

$$(1-a_1)(1-a_2) - 1 + \left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right) = a_1 a_2 - \frac{a_2}{2} = a_2 \left(a_1 - \frac{1}{2}\right) > 0$$

よって, 不等式(*)は成立する。

(ii) $n = k$ のとき $\frac{1}{2} < a_j < 1$ ($j = 1, 2, \dots, k$) に対して,

不等式 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}}\right)$ の成立を仮定する。

さて, $\frac{1}{2} < a_{k+1} < 1$ に対して,

$$\begin{aligned} & (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1}) - 1 + \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{2^k}\right) \\ & > \left\{1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\} (1-a_{k+1}) - 1 + \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{2^k}\right) \\ & = -a_{k+1} + \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}}\right) a_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{2^k} \\ & = \left(-1 + a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}\right) a_{k+1} \\ & > \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right) a_{k+1} \end{aligned}$$

ここで, $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^k} = 0$ より,

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1}) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

(i)(ii)より, $n \geq 2$ のとき, $\frac{1}{2} < a_j < 1$ に対して, 不等式(*)が成立する。

[解説]

数学的帰納法による不等式の証明問題です。予想よりはるかにスッキリ示せます。

5

問題のページへ

原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S の方程式は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

3点 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ を通る平面 α の方程式は、

$$x + y + z = 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて、球面 S の中心 O と平面 α の距離 d は、 $d = \frac{|-4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

よって、 $4 < \sqrt{18}$ から、 $d = \frac{4}{\sqrt{3}} < \sqrt{6}$ となり、球面 S と平面 α は共有点をもつ。

ここで、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ をともに満たす x, y, z に対して、 $xyz = k \cdots \cdots \textcircled{3}$ とおく。

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より、} xy + yz + zx = \frac{1}{2} \{ (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \} = 5 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

すると、 $\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$ より、 x, y, z は u に関する 3 次方程式 $u^3 - 4u^2 + 5u - k = 0$ 、すなわち $u^3 - 4u^2 + 5u = k \cdots \cdots \textcircled{5}$ の 3 つの実数解としてみることができる。

さらに、 $\textcircled{5}$ を uv 平面上でとらえなおし、

$$v = u^3 - 4u^2 + 5u \cdots \cdots \textcircled{6}, \quad v = k \cdots \cdots \textcircled{7}$$




これより、 k の値の範囲は、曲線 $\textcircled{6}$ と直線 $\textcircled{7}$ が 3 個の共有点(接点は 2 個とみなす)をもつ条件として求めることができる。

$$\textcircled{6} \text{ より、} v' = 3u^2 - 8u + 5 = (3u - 5)(u - 1)$$

曲線 $\textcircled{6}$ の増減は右表のようになり、曲線 $\textcircled{6}$ と u 軸に平行な直線 $\textcircled{7}$ の共有点が 3 個(接点は 2 個とみなす)

となる k の条件は、 $\frac{50}{27} \leq k \leq 2$ であるので、

$$\frac{50}{27} \leq xyz \leq 2$$

u	⋯	1	⋯	$\frac{5}{3}$	⋯
v'	+	0	-	0	+
v		2		$\frac{50}{27}$	

[解説]

導入は空間図形ですが、内容は、条件付きの最大・最小問題です。頻出題なので、演習は必須です。

6

問題のページへ

一般的に、空間の異なる 2 定点 P, Q から等距離にある点は、線分 PQ の垂直二等分面を描く。

さて、辺 DA, DB, DC の垂直二等分面をそれぞれ α, β, γ とすると、

$$\overline{DA} \perp \alpha, \overline{DB} \perp \beta, \overline{DC} \perp \gamma$$

\overline{DB} と \overline{DC} は平行ではないので、平面 β と γ は平行ではない。これより、平面 β と γ の交線が存在する。この交線を l とし、 l の方向ベクトルを \vec{u} とおく。

直線 l は平面 β 上にあり、しかも平面 γ 上にあるので、

$$\overline{DB} \perp \vec{u}, \overline{DC} \perp \vec{u}$$

ここで、直線 l と平面 α が平行であると仮定すると、 $\overline{DA} \perp \vec{u}$ である。しかし、このとき 4 点 A, B, C, D は同一平面上にあることになり、条件に反する。

したがって、直線 l と平面 α は平行でなく、交点が存在する。この交点を O とすると、 $OA = OB = OC = OD$ である。

すなわち、点 O を中心とし、4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在する。

[解説]

いろいろな手段によって、証明することができそうです。上の解答例は最初に考えたものです。

