1　　解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1)　2 つの曲線 $y=x^4$ と $y=x^2+2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

(2)　n を 3 以上の整数とする。1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある。これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする。$X_1<X_2<X_3$ となる確率を求めよ。ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする。

2

解答解説のページへ

正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば, n は 3 の倍数である。

(q)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において，$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$ ならば，これら 2 つの三角形は合同である。

5

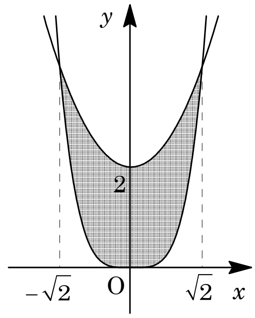
解答解説のページへ

次の条件(＊)を満たす正の実数の組$(a,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

(＊)　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど1つある。

1

問題のページへ



(1)　曲線 $y=x^4$ ……①，$y=x^2+2$ ……②の交点は，

$$x^4-x^2-2=0,\ (x^2-2)(x^2+1)=0$$

よって，$x=\pm\sqrt{2}$ となる。

曲線①と②によって囲まれる図形は，y 軸対称なので，その面積を S とすると，

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}(x^2+2-x^4)\,dx=2\Big[\frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^5}{5}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\Big(\frac{2}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\frac{4}{5}\sqrt{2}\Big)=\frac{56}{15}\sqrt{2}$$

(2)　$2n$ 枚の札から 1 枚ずつ 3 回取り出して並べる ${}_{2n}\mathrm{P}_3=2n(2n-1)(2n-2)$ 通りの場合が，同様に確からしいとする。

さて，3 回取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とし，$X_1<X_2<X_3$ となるのは，$X_2=k\ (2\leqq k\leqq n-1)$ のとき，X_2 は 2 通りの選び方，X_1 は $2(k-1)$ 通りの選び方，X_3 は $2(n-k)$ 通りの選び方があるので，その総数は，

$$\sum_{k=2}^{n-1}2\cdot 2(k-1)\cdot 2(n-k)=8\sum_{k=1}^{n-2}k(n-k-1)=8\sum_{k=1}^{n-2}\big\{(n-1)k-k^2\big\}$$

$$=4(n-1)^2(n-2)-\frac{4}{3}(n-1)(n-2)(2n-3)$$

$$=\frac{4}{3}(n-1)(n-2)\big\{3(n-1)-(2n-3)\big\}=\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)$$

よって，$X_1<X_2<X_3$ となる確率は，

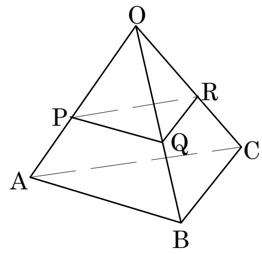
$$\frac{4n(n-1)(n-2)}{3\cdot{}_{2n}\mathrm{P}_3}=\frac{4n(n-1)(n-2)}{12n(2n-1)(n-1)}=\frac{n-2}{3(2n-1)}$$

［解　説］

(1)は基本的な積分計算です。(2)は真正面から取り組んだ解ですが，普通に組合せを利用した方が明快でした。

2

問題のページへ



正四面体 OABC において$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ ……①

としても一般性を失わない。

また，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\cdots\cdots\text{②}$$

さて，$0<p<1$，$0<q<1$，$0<r<1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形より，

$$|p\overrightarrow{\mathrm{OA}}-q\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-r\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|r\overrightarrow{\mathrm{OC}}-p\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$$

①②より，$p^2-pq+q^2=q^2-qr+r^2=r^2-rp+p^2$ ………③

③から，$p^2-pq=-qr+r^2$，$p^2-r^2-q(p-r)=0$ となり，

$$(p-r)(p+r-q)=0\cdots\cdots\text{④}$$

また，③から，同様にすると，$(p-q)(p+q-r)=0$ ………⑤

そこで，④⑤から，場合分けをすると，

(i)　$p-r=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$p=q=r$

(ii)　$p-r=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$q=0$ となり不適

(iii)　$p+r-q=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$r=0$ となり不適

(iv)　$p+r-q=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$p=0$ となり不適

(i)～(iv)より，$p=q=r$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{QR}}=p\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{RP}}=p\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

よって，PQ // AB, QR // BC, RP // CA

［解　説］

ベクトルを利用して普通に設定をし，式変形を行っていくと，直感的に正しいと思える結論に到達できます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので,

$$D=u^2-4v \geqq 0 \text{………②}$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6)\geqq 0$，$u^2-8\leqq 0$，$-2\sqrt{2}\leqq u\leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から,

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$
$$=u^3-u^2-5u$$
$$z'=3u^2-2u-5$$
$$=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は,

$$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$$

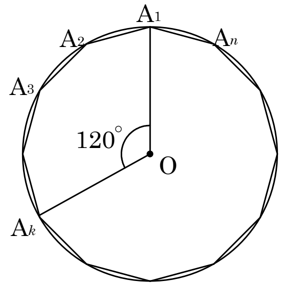
［解　説］

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

4

問題のページへ

(p)　正しい。



正 n 角形の外接円上に，頂点 A_1，A_2，…，A_k，…，A_n があるとする。

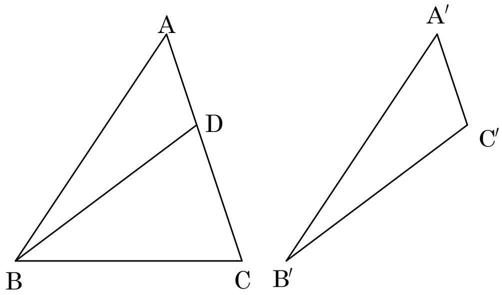
さて，中心を O とすると，条件より，$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{OA}_k=120°$ となる $k(2\leqq k\leqq n-1)$ が存在する。

ここで，$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{OA}_k=\dfrac{360°}{n}\times(k-1)$ より，

$$\frac{360°}{n}\times(k-1)=120°,\ 360°\times(k-1)=120°\times n$$

よって，$n=3(k-1)$ となり，n は 3 の倍数である。

(q)　正しくない。



右の△ABC において，辺 AC 上に点 D を $\mathrm{BD}=\mathrm{BC}$ となるようにとり，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ を $\triangle\mathrm{A'B'C'}\equiv\triangle\mathrm{ABD}$ であるように決める。

$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$ を満たすが，△ABC と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は合同ではない。

［解　説］

どちらも図形がらみの証明問題ですが，内容は基本的です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

条件より，$\cos a\theta = \cos b\theta$ （$a>0,\ b>0$）に対し，

$$\cos a\theta - \cos b\theta = 0\ ,\ -2\sin\frac{a+b}{2}\theta\sin\frac{a-b}{2}\theta = 0\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$f(\theta)=\sin\frac{a+b}{2}\theta$，$g(\theta)=\sin\frac{a-b}{2}\theta$ とおくと，①から，

$$f(\theta)g(\theta)=0\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$f(\theta)$ は周期 $\frac{4\pi}{a+b}$ の周期関数である。

また，$g(\theta)$ は，$a>b>0$ のとき周期 $\frac{4\pi}{a-b}$，$b>a>0$ のとき周期 $\frac{4\pi}{b-a}$ の周期関数となり，$a=b>0$ のとき $g(\theta)=0$ である。

これより，②を満たす $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど 1 つある条件は，$a\neq b$ で，

(i)　$a>b>0$ のとき

$\frac{4\pi}{a+b}<\frac{4\pi}{a-b}$ から，$\pi<\frac{4\pi}{a+b}\leqq 2\pi$ かつ $\frac{4\pi}{a-b}>2\pi$ となり，

$$a+b<4\ ,\ a+b\geqq 2\ ,\ a-b<2$$

(ii)　$b>a>0$ のとき

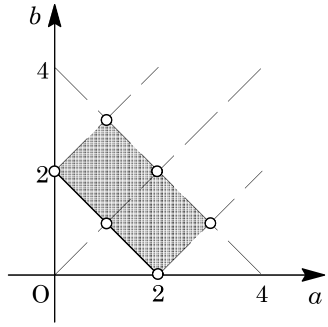
$\frac{4\pi}{a+b}<\frac{4\pi}{b-a}$ から，$\pi<\frac{4\pi}{a+b}\leqq 2\pi$ かつ $\frac{4\pi}{b-a}>2\pi$

となり，

$$a+b<4\ ,\ a+b\geqq 2\ ,\ b-a<2$$

(i)(ii)より，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示すると，右図の網点部となる。

ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。また，白丸も含まない。



［解 説］

上の解には明示していませんが，サインカーブを描きながら考えています。そのため，周期に注目しているわけです。おもしろい問題です。