1

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1)　a が正の実数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q)　$\triangle$ABC と $\triangle$ABD において，AC＜AD かつ BC＜BD ならば，$\angle$C＞$\angle$D である。

6　　解答解説のページへ

さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。さらに

$$Y_1 = X_1,\ Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k = 2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_n を定める。$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ。

1　　問題のページへ

(1) (i)　$0<a\leqq 1$ のとき

$1<1+a^n\leqq 2$ より，$1<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$$

(ii)　$a>1$ のとき

$a^n<1+a^n<2a^n$ より，$a<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

(2)　$I=\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ に対して，$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta}\log\sqrt{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2\theta}\log\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}\,d\theta$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2\theta}\log(\cos\theta)d\theta=\Big[\frac{1}{\tan\theta}\log(\cos\theta)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}\log 2+\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

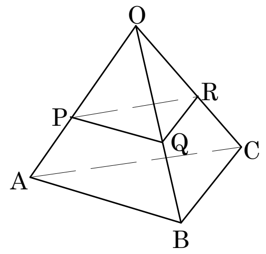
$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\log 2+\frac{\pi}{12}$$

［解 説］

(1)は，見かけよりは難です。極限を大雑把にとらえ不等式で評価しました。(2)は積分区間や被積分関数に注目し，置換積分→部分積分の順序で実行しました。しかし，部分積分→置換積分の方が簡単でした。

2

問題のページへ



正四面体 OABC において $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ ……①

としても一般性を失わない。

また，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60°$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$0<p<1$，$0<q<1$，$0<r<1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形より，

$$|p\overrightarrow{\mathrm{OA}}-q\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-r\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|r\overrightarrow{\mathrm{OC}}-p\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$$

①②より，$p^2-pq+q^2=q^2-qr+r^2=r^2-rp+p^2$ ………③

③から，$p^2-pq=-qr+r^2$，$p^2-r^2-q(p-r)=0$ となり，

$$(p-r)(p+r-q)=0\cdots\cdots\cdots④$$

また，③から，同様にすると，$(p-q)(p+q-r)=0$ ………⑤

そこで，④⑤から，場合分けをすると，

(i)　$p-r=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$p=q=r$

(ii)　$p-r=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$q=0$ となり不適

(iii)　$p+r-q=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$r=0$ となり不適

(iv)　$p+r-q=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$p=0$ となり不適

(i)～(iv)より，$p=q=r$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{QR}}=p\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{RP}}=p\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

よって，PQ // AB, QR // BC, RP // CA

［解　説］

ベクトルを利用して普通に設定をし，式変形を行っていくと，直感的に正しいと思える結論に到達できます。

3

問題のページへ

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので，

$$D=u^2-4v \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6)\geqq 0$，$u^2-8\leqq 0$，$-2\sqrt{2}\leqq u\leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から，

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$
$$=u^3-u^2-5u$$
$$z'=3u^2-2u-5$$
$$=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm 2\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は，

$$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$$

［解 説］

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

4

問題のページへ

(1) $\sqrt[3]{2}$ が有理数であると仮定すると, p, q を互いに素である自然数として,

$$\sqrt[3]{2}=\frac{q}{p},\ q^3=2p^3\cdots\cdots\cdots①$$

すると, q は 2 の倍数となり, k を自然数として, $q=2k\cdots\cdots\cdots②$

②を①に代入すると，$8k^3=2p^3$，$p^3=4k^3$

すると, p も 2 の倍数となり, p, q が互いに素であることに反する。

よって，$\sqrt[3]{2}$ が有理数でない, すなわち無理数である。

(2) 有理数を係数とする多項式 $P(x)$ を，x^3-2 で割った商を $Q(x)$ とし，余りを ax^2+bx+c（a, b, c は有理数）とおくと,

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\alpha=\sqrt[3]{2}$ とすると，条件より $P(\alpha)=0$ なので，$a\alpha^2+b\alpha+c=0\cdots\cdots\cdots④$

次に，x^3-2 を ax^2+bx+c で割ると，$a\neq0$ のとき,

$$x^3-2=(ax^2+bx+c)\Big(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^2}\Big)+\Big(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}\Big)x+\Big(-2+\frac{bc}{a^2}\Big)\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤に $x=\alpha$ を代入すると，④より，$\Big(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}\Big)\alpha+\Big(-2+\frac{bc}{a^2}\Big)=0$

a, b, c は有理数であり, (1)から α は無理数なので,

$$-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}=0\cdots\cdots\cdots⑥,\ -2+\frac{bc}{a^2}=0\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥より，$c=\frac{b^2}{a}$ となり，⑦に代入すると，$\Big(\frac{b}{a}\Big)^3=2$ から，$\frac{b}{a}=\sqrt[3]{2}$

ところが, 左辺が有理数, 右辺が無理数なので, 成立しない。

よって，$a=0\cdots\cdots⑧$である。

すると，④より $b\alpha+c=0$ となり, b, c は有理数，α は無理数なので,

$$b=c=0\cdots\cdots⑨$$

⑧⑨を③に代入すると，$P(x)=(x^3-2)Q(x)$

したがって，$P(x)$ は x^3-2 で割り切れる。

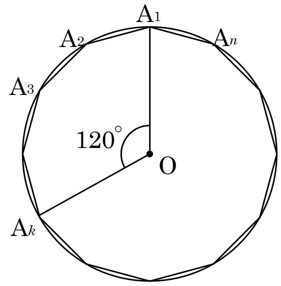
［解 説］

(1)は有名問題。(2)はこの結論を利用するのですが，一筋縄ではいきません。

5

問題のページへ

(*p*)　正しい。



正 n 角形の外接円上に，頂点 A_1，A_2，…，A_k，…，A_n があるとする。

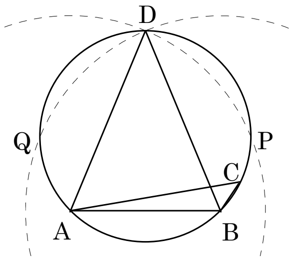
さて，中心を O とすると，条件より，$\angle A_1OA_k = 120°$ となる $k(2 \leqq k \leqq n-1)$ が存在する。

ここで，$\angle A_1OA_k = \dfrac{360°}{n} \times (k-1)$ より，

$$\frac{360°}{n} \times (k-1) = 120°,\ 360° \times (k-1) = 120° \times n$$

よって，$n = 3(k-1)$ となり，n は 3 の倍数である。

(*q*)　正しくない。



DA＝DB＞AB である△ABD の外接円を O とする。

さて，点 A と中心とする半径 AD の円，点 B を中心とする半径 BD の円を描き，円 O との交点で D でないものをそれぞれ P, Q とする。

そして，弧 AQ または弧点 BP 上に点 C をとる。

すると，AC＜AD かつ BC＜BD であるが，∠C＝∠D である。すなわち，∠C＞∠D は成立しない。

［解 説］

どちらも図形がらみの証明問題です。(*q*)は，判断を間違いそうになりましたが。

6

問題のページへ

まず，$Y_1 = X_1$，$Y_n = X_n + \dfrac{1}{Y_{n-1}}$ から，帰納的に $Y_n \geqq 1$ である。

そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$ である条件は，$\dfrac{5}{4} < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2} < 1+\sqrt{3} < 3$ に注目すると，$X_n = 1$ または $X_n = 2$ の場合についてだけ考えればよい。

(i)　$X_n = 1$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 1 + \dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$ から，右側の不等式は成立し，$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq \dfrac{1}{Y_{n-1}}$ から，

$$Y_{n-1} \leqq \frac{2}{-1+\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$$

(ii)　$X_n = 2$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 2 + \dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$ から，左側の不等式は成立し，$\dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq -1+\sqrt{3}$ から，

$$Y_{n-1} \geqq \frac{1}{-1+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{n-1} \leqq 1+\sqrt{3}$ では $X_n = 1$ または $X_n = 2$，$Y_{n-1} < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ では $X_n = 1$ だけ，$Y_{n-1} > 1+\sqrt{3}$ では $X_n = 2$ だけである。

そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$，$Y_n < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$Y_n > 1+\sqrt{3}$ となる確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおくと，

$$p_n = \frac{2}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}q_{n-1} + \frac{1}{6}r_{n-1} = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6}(q_{n-1} + r_{n-1})$$

$p_n + q_n + r_n = 1$ から，$p_n = \dfrac{1}{3}p_{n-1} + \dfrac{1}{6}(1 - p_{n-1}) = \dfrac{1}{6}p_{n-1} + \dfrac{1}{6}$ となり，

$$p_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(p_{n-1} - \frac{1}{5}\right) = \left(p_1 - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_1 \leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは，$Y_1 = X_1 = 2$ から $p_1 = \dfrac{1}{6}$ であり，

$$p_n = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

［解　説］

上の解答例には記していませんが，最初，題意をつかむために実験をしています。もつれた糸を解きほぐすように計算をすすめたところ，予想を超える簡明な結論が導けました。おもしろい問題です。