$\boxed{1}$

解答解説のページへ

a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。

２

解答解説のページへ

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を$1:1$に内分する点を E，辺 BC を$2:1$に内分する点を F，辺 CD を$3:1$に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1) a と b は整数であることを示せ。

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

4

解答解説のページへ

α，βを実数とする。xy平面内で，点$(0,\ 3)$を中心とする円Cと放物線

$$y=-\frac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$$

が点$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$を共有し，さらに P における接線が一致している。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　α，βの値を求めよ。

(2)　円C，放物線$y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$および$y$軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2) 石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ。

1　　問題のページへ

$a \geqq 2$ において，$f(x)=(x+a)(x+2)$ に対し，$f(f(x))>0$ より，

$$\{f(x)+a\}\{f(x)+2\}>0$$

$-a \leqq -2$ から，$f(x)<-a$ または $-2<f(x)$ ……(＊)

さて，(＊)がすべての実数 x に対して成り立つ条件は，$-2<f(x)$ がすべての実数 x に対して成り立つことに等しく，$f(x)$ を変形すると，

$$f(x)=x^2+(a+2)x+2a=\left(x+\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}$$

よって，求める条件は，$-\dfrac{(a-2)^2}{4}>-2$ となり，$(a-2)^2<8$ から，

$$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$$

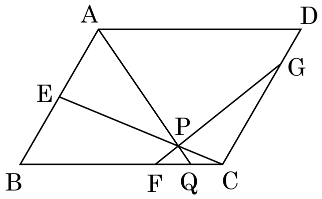
すると，$a \geqq 2$ より，$2 \leqq a < 2+2\sqrt{2}$

［解　説］

記載は省きましたが，2 次関数のグラフをもとに考えています。なお，4 次不等式として処理することも可能です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおき，s, t を実数とすると，点 P が線分 FG と線分 CE の交点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$
$$=s\left(\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+(1-s)\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}s\right)\vec{b}+\left(1-\frac{1}{3}s\right)\vec{d}\cdots\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t(\vec{b}+\vec{d})+\frac{1}{2}(1-t)\vec{b}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)\vec{b}+t\vec{d}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立なので，①②より，$\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}s=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t$，$1-\dfrac{1}{3}s=t$

まとめると，$t=\dfrac{8}{11}$ となり，②に代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}\vec{b}+\frac{8}{11}\vec{d}$$

さらに，点 Q は直線 AP と辺 BC の交点より，k, l を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}k\vec{b}+\frac{8}{11}k\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+l\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$$

$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立なので，③④より，$\dfrac{19}{22}k=1$，$\dfrac{8}{11}k=l$

すると，$k=\dfrac{22}{19}$ となり，$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=1:(k-1)=1:\dfrac{3}{19}=19:3$ である。

［解　説］

題材が平行四辺形なので，補助線を引いて，相似を利用する手も考えられます。ただ，実戦的には，上のような解でしょう。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) 整式x^nを整式$(x-k)(x-k-1)$で割った商を$q(x)$，余りを$ax+b$とするとき，

$$x^n=(x-k)(x-k-1)q(x)+ax+b\cdots\cdots\cdots①$$

①に$x=k,\ k+1$をそれぞれ代入すると，

$$k^n=ak+b\cdots\cdots\cdots②,\ (k+1)^n=ak+a+b\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$a=(k+1)^n-k^n$となり，nとkは自然数なので，aは整数である。

すると，②は，$b=k^n-ak$なので，bも整数である。

(2) aとbがともに素数pで割り切れるとすると，a_0，b_0を整数として，

$$a=a_0p,\ b=b_0p$$

②③に代入すると，

$$k^n=a_0pk+b_0p\cdots\cdots\cdots④,\ (k+1)^n=a_0pk+a_0p+b_0p\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，k^nはpを約数にもつ，すなわちkはpを約数にもつ。

⑤より，$(k+1)^n$はpを約数にもつ，すなわち$k+1$はpを約数にもつ。

すると，kと$k+1$はともに素数pを約数にもつことになるが，これはkと$k+1$が互いに素であることと矛盾する。

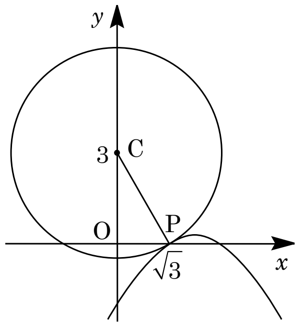
よって，aとbをともに割り切る素数は存在しない。

［解 説］

$(k+1)-k=1$から，kと$k+1$は互いに素です。昨年，東大・理系でも，この点に着目する問題が出されています。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　円 C の中心 C(0, 3) と P($\sqrt{3}$, 0) を結ぶ線分の傾きは, $\dfrac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ より，点 P における円 C の接線の傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

ここで，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ ……①に対して，

$$y'=-\frac{2}{3}x+\alpha$$

条件より，放物線①は点 P を通り，P における接線の傾きが $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるので,

$$0=-1+\sqrt{3}\alpha-\beta\ \cdots\cdots②,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\alpha\ \cdots\cdots③$$

③より，$\alpha=\sqrt{3}$ となり，②に代入すると，$\beta=2$ である。

(2)　(1)より，放物線①は $y=-\dfrac{x^2}{3}+\sqrt{3}x-2$，直線 CP は $y=-\sqrt{3}x+3$ である。

また，$\angle\mathrm{OCP}=\dfrac{\pi}{6}$ より，円 C，放物線①および y 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}x+3+\frac{x^2}{3}-\sqrt{3}x+2\right)dx-\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{3}-2\sqrt{3}x+5\right)dx-\pi=\left[\frac{x^3}{9}-\sqrt{3}x^2+5x\right]_0^{\sqrt{3}}-\pi=\frac{7}{3}\sqrt{3}-\pi$$

［解　説］

円と放物線についての基本的な計算問題です。積分計算もややこしくありません。

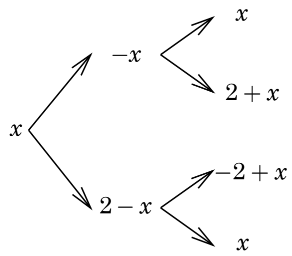
$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　座標 x の点に石があるとき，硬貨を投げて表が出れば点 $-x$ に，裏が出れば点 $2-x$ に移動する。

すると，2 回投げたとき，石の座標は右図のように移動するので，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$



(2)　$2n$ 回硬貨を投げたとき，原点にある石が座標 $2n$ の点に移動するのは，(1)より，2 回投げたとき 2 だけ移動する $(x\to 2+x)$ のを，n 回繰り返す場合だけである。よって，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

［解 説］

漸化式を立てる問題かとも思いましたが，予想ははずれました。(2)の設問は不気味なくらいです。