1

解答解説のページへ

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を$1:1$に内分する点を E，辺 BC を$2:1$に内分する点を F，辺 CD を$3:1$に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

N を 2 以上の自然数とし，a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i)，(ii)を満たす数列とする。

(i)　$a_1 = 2^N - 3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

a_n が偶数のとき $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$，a_n が奇数のとき $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{2}$

このとき，どのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$$

が成り立つことを示せ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。

5

解答解説のページへ

xy 平面上で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x),\quad C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする。さらに△PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

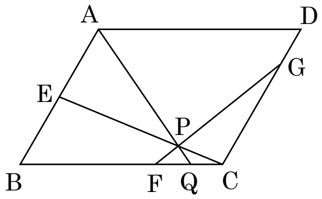
投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2) 石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ。

1

問題のページへ



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおき, s, t を実数とすると, 点 P が線分 FG と線分 CE の交点より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$
$$=s\left(\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+(1-s)\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}s\right)\vec{b}+\left(1-\frac{1}{3}s\right)\vec{d}\cdots\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t(\vec{b}+\vec{d})+\frac{1}{2}(1-t)\vec{b}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)\vec{b}+t\vec{d}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで, $\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立なので, ①②より, $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$, $1-\frac{1}{3}s=t$

まとめると, $t=\frac{8}{11}$ となり, ②に代入して,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}\vec{b}+\frac{8}{11}\vec{d}$$

さらに, 点 Q は直線 AP と辺 BC の交点より, k, l を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}k\vec{b}+\frac{8}{11}k\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+l\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$$

$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立なので, ③④より, $\frac{19}{22}k=1$, $\frac{8}{11}k=l$

すると, $k=\frac{22}{19}$ となり, $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=1:(k-1)=1:\frac{3}{19}=19:3$ である。

［解 説］

題材が平行四辺形なので, 補助線を引いて, 相似を利用する手も考えられます。ただ, 実戦的には, 上のような解でしょう。

2

問題のページへ

$N \geqq 2$ より，$a_1 = 2^N - 3$ は奇数なので，$a_2 = \dfrac{a_1 - 1}{2} = \dfrac{2^N - 3 - 1}{2} = 2^{N-1} - 2$

a_2 は偶数となり，$a_3 = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{2^{N-1} - 2}{2} = 2^{N-2} - 1$

すると，$N = 2$ のとき $a_3 = 0$ から a_3 は偶数となり，$a_4 = \dfrac{a_3}{2} = 0$，また $N \geqq 3$ のときは a_3 は奇数となり，$a_4 = \dfrac{a_3 - 1}{2} = \dfrac{2^{N-2} - 1 - 1}{2} = 2^{N-3} - 1$

さらに，$2 \leqq N \leqq 3$ のとき $a_4 = 0$ から a_4 は偶数となり，$a_5 = \dfrac{a_4}{2} = 0$，また $N \geqq 4$ のときは a_4 は奇数となり，$a_5 = \dfrac{a_4 - 1}{2} = \dfrac{2^{N-3} - 1 - 1}{2} = 2^{N-4} - 1$

以上より，$a_1 = 2^N - 3$，$a_2 = 2^{N-1} - 2$ で，$n \geqq 3$ のときは，帰納的に，a_n を以下のようにまとめることができる。

(i)　$n \geqq N + 1$ のとき　$a_n = 0$

(ii)　$n \leqq N$ のとき　$a_n = 2^{N-n+1} - 1$

さて，$S_M = \displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n$ とおくと，$N \geqq 3$ のとき，

$$
\begin{aligned}
S_M &\leqq S_N = (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + \sum_{n=3}^{N} a_n \\
&= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + (2^{N-2} - 1) + (2^{N-3} - 1) + \cdots + (2^1 - 1) \\
&= \frac{2(2^N - 1)}{2 - 1} - N - 3 = 2^{N+1} - N - 5
\end{aligned}
$$

また，$N = 2$ のときは，$a_1 = 2^2 - 3 = 1$，$a_2 = 2^1 - 2 = 0$，$n \geqq 3$ のとき $a_n = 0$ より，

$$S_M = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 1 = 2^3 - 2 - 5 = 2^{N+1} - N - 5$$

したがって，どのような自然数 M に対しても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$ が成立する。

［解　説］

n が大きくなると a_n は 0 になって，和は変わらないというような大雑把なとらえ方が必要です。ただ，文字がたくさん出るので，詰めの作業は気疲れします。

$\boxed{3}$　問題のページへ

整式x^nを整式x^2-2x-1で割った商を$q_n(x)$，余りをa_nx+b_nとすると，

$$x^n=(x^2-2x-1)q_n(x)+a_nx+b_n\ \cdots\cdots\cdots①$$

このとき，a_nとb_nは整数であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=1$，$b_1=0$でともに整数である。

(ii)　$n=k$のとき　a_kとb_kがともに整数であると仮定し，①より，

$$x^k=(x^2-2x-1)q_k(x)+a_kx+b_k$$

$$\begin{aligned}x^{k+1}&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_kx^2+b_kx\\&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_k(x^2-2x-1)+a_k(2x+1)+b_kx\\&=(x^2-2x-1)\{xq_k(x)+a_k\}+(2a_k+b_k)x+a_k\end{aligned}$$

整式x^{k+1}を整式x^2-2x-1で割った余りは$a_{k+1}x+b_{k+1}$より，

$$a_{k+1}=2a_k+b_k\ \cdots\cdots\cdots②,\quad b_{k+1}=a_k\ \cdots\cdots\cdots③$$

これより，a_{k+1}，b_{k+1}はともに整数である。

(i)(ii)より，a_nとb_nは整数である。

次に，a_nとb_nをともに割り切る素数は存在しないことを証明する。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=1$，$b_1=0$で，ともに割り切る素数は存在しない。

(ii)　$n=k$のとき　a_kとb_kをともに割り切る素数は存在しないと仮定する。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1}がともに素数pで割り切れるとすると，②③より，

$$a_k=b_{k+1},\quad b_k=a_{k+1}-2a_k=a_{k+1}-2b_{k+1}$$

これより，a_k，b_kも素数pで割り切れ，仮定に反する。

よって，a_{k+1}とb_{k+1}をともに割り切る素数は存在しない。

(i)(ii)より，a_nとb_nをともに割り切る素数は存在しない。

以上より，整式x^nを整式x^2-2x-1で割った余りを$ax+b$とするとき，aとbは整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しない。

［解　説］

見かけは，本年の文系 2 番の類題ですが，内容的には 2002 年の東大の文理共通の 2 番の類題です。誘導はありましたが……。

$\boxed{4}$

問題のページへ

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ とおくと，$f(-x) = f(x)$ より，$f(x)$ は偶関数であり，以下，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において考える。

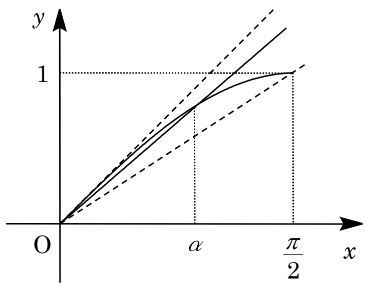
まず，$f'(x) = -\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ ………(＊)

ここで，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$ であり，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi > \dfrac{1.7\times 3.1}{2} = \dfrac{5.27}{2} > 2$ より，

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

すると，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，

$$\frac{2}{\pi}x < \frac{\sqrt{3}}{2}x < x$$



一方，$y = \sin x$ の原点における接線の方程式は，$y = x$ であることから，(＊) より，$f'(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ においてただ 1 つの解をもつ。

これを $x = \alpha$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘		↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2$

ここで，$\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2 > \dfrac{1.7\times 3.1^2}{16} = \dfrac{16.337}{16} > 1$ より，$f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ において最大値をとる。

すなわち，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の最大値は，

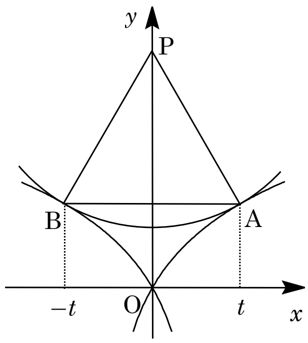
$$f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2$$

［解　説］

解答例のグラフをもとに考えています。数値計算も予想したよりは簡単でした。

$\boxed{5}$

問題のページへ



曲線 $C_1: y=\sqrt{3}\log(1+x)$ と $C_2: y=\sqrt{3}\log(1-x)$ は y 軸対称なので，y 軸上の点 P を中心とする円 C が C_1 に接するとき，円 C は C_2 にも接する。

さて，円 C と C_1，C_2 との接点をそれぞれ A, B とするとき，△PAB が正三角形となることから，辺 PA と y 軸とのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ である。すなわち，線分 PA の傾きは $-\sqrt{3}$ となる。

C と C_1 の接点 $\mathrm{A}(t,\ \sqrt{3}\log(1+t))$ とおくと，A における C_1 の接線は，線分 PA と垂直になるので，$y'=\dfrac{\sqrt{3}}{1+x}$ より，

$$(-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{1+t}=-1,\quad -\frac{3}{1+t}=-1$$

すると，$1+t>0$ より，$t=2$

よって，$\mathrm{A}(2,\ \sqrt{3}\log 3)$ となり，直線 PA の方程式は，

$$y-\sqrt{3}\log 3=-\sqrt{3}(x-2),\quad y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}(2+\log 3)$$

これより，$\mathrm{P}(0,\ \sqrt{3}(2+\log 3))$ となり，円 C の半径 PA は，

$$\mathrm{PA}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$$

そこで，3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$\frac{S}{2}=\int_0^2\{-\sqrt{3}x+\sqrt{3}(2+\log 3)-\sqrt{3}\log(1+x)\}dx-\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$=\Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\sqrt{3}(2+\log 3)x\Big]_0^2-\sqrt{3}\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^2+\sqrt{3}\int_0^2 dx-\frac{4}{3}\pi$$

$$=-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}(2+\log 3)-3\sqrt{3}\log 3+2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}(4-\log 3)-\frac{4}{3}\pi$$

以上より，$S=2\sqrt{3}(4-\log 3)-\dfrac{8}{3}\pi$ である。

［解　説］

y 軸に関する対称性を利用すると，計算量は標準的なものです。なお，点 P が x 軸の上側というのは感覚的にわかるものの，下側のときも考慮して記述しています。

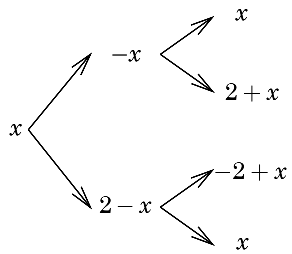
6

問題のページへ

(1)　座標 x の点に石があるとき，硬貨を投げて表が出れば点 $-x$ に，裏が出れば点 $2-x$ に移動する。

　すると，2 回投げたとき，石の座標は右図のように移動するので，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$



(2)　(1)より，2 回投げたとき，$x\to 2+x$ と 2 だけ移動する確率は $\frac{1}{4}$，$x\to x$ と移動しない確率は $\frac{1}{2}$，$x\to -2+x$ と -2 だけ移動する確率は $\frac{1}{4}$ である。

　さて，$2n$ 回硬貨を投げたとき，原点にある石が座標 $2n-2$ の点に移動する場合，$x\to 2+x$ の移動が a 回，$x\to x$ の移動が b 回，$x\to -2+x$ の移動が c 回とすると，

$$a+b+c=n\ \cdots\cdots\cdots①,\quad 2a-2c=2n-2\ \cdots\cdots\cdots②$$

　①②より，$b+2c=1$ となり，a，b，c は 0 以上の整数より，$b=1$，$c=0$ となる。

　よって，$(a,\ b,\ c)=(n-1,\ 1,\ 0)$ となり，求める確率は，

$${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

［解　説］

文系の類題ですが, (2)も，文系ほどではないにせよ，あっさり解けてしまいます。