1

解答解説のページへ

$0° \leqq \theta < 90°$ とする。x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも 1 つもつことを示せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

t を実数とする。$y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く。

(1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間における次の 3 つの直線 $l,\ m,\ n$ を考える：

l は点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 $\mathrm{B}(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から $m,\ n$ へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の式 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n - 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 次の不等式 $a_n{}^2 - 2a_n > 10^{15}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

5

解答解説のページへ

1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり，それぞれの目が出る確率は等しいものとする。A, B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ 1 回ずつ投げ，大きな目を出した方はその目を得点とし，小さな目を出した方は得点を 0 とする。また同じ目が出た場合は，A, B ともに 0 とする。このとき，A の得点の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

4 次方程式 $\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0\cdots\cdots(*)$に対して，

$$x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ x^2+2(\tan\theta)x+3=0\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①，②の判別式をそれぞれD_1，D_2とすると，

$$D_1/4=\cos^2\theta+\cos\theta-1,\ \ D_2/4=\tan^2\theta-3$$

さて，①が虚数解をもたない条件は，$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$ であり，

$$\cos^2\theta+\cos\theta-1\geqq 0\cdots\cdots\cdots③,\ \ \tan^2\theta-3\geqq 0\cdots\cdots\cdots④$$

条件より $0°\leqq\theta<90°$ なので，④から $\tan\theta\geqq\sqrt{3}$，すなわち $60°\leqq\theta<90°$ となり，

$$0<\cos\theta\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，③より，$\cos\theta>0$ から，$\cos\theta\geqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$

すると，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ から，⑤⑥をともに満たすθは存在せず，$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$ は成立しない。すなわち，4 次方程式$(*)$は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

［解 説］

解答例は背理法風に記しました。意外なことに，④からθの範囲が決まります。

2

問題のページへ

(1)　$C: y = x^3 - x$ ……①に対して $y' = 3x^2 - 1$ となり，点 $(s,\ s^3 - s)$ における接線は,

$$y - (s^3 - s) = (3s^2 - 1)(x - s),\ \ y = (3s^2 - 1)x - 2s^3 \ \cdots\cdots\cdots②$$

接線②が $\mathrm{P}(1,\ t)$ を通ることより，$t = 3s^2 - 1 - 2s^3$ ………③

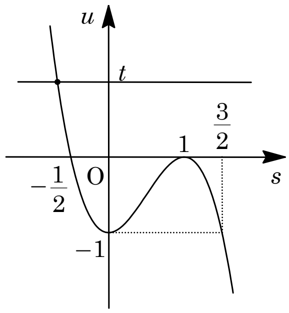
ここで，$f(s) = 3s^2 - 1 - 2s^3$ とおくと，

$$f'(s) = 6s - 6s^2 = -6s(s-1)$$

これより $f(s)$ の増減は右表のようになる。

s	…	0	…	1	…
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(s)$	↘	-1	↗	0	↘

さて，接線がちょうど 1 本だけ引ける条件は，③を満たす実数解 s が 1 つだけ存在する条件に対応する。言い換えると，$u = f(s)$ と $u = t$ のグラフが共有点を 1 つだけもつことより，右図から，



$$t < -1,\ 0 < t \cdots\cdots\cdots④$$

(2)　①②を連立すると，$x^3 - x = (3s^2 - 1)x - 2s^3$ から，

$$x^3 - 3s^2x + 2s^3 = 0,\ (x - s)^2(x + 2s) = 0$$

これより，$x = s,\ -2s$ となる。この共有点間で，曲線①と接線②について上下の位置関係は変わらないので，囲まれた部分の面積 $S(t)$ は,

$$S(t) = \left|\int_s^{-2s} -(x-s)^2(x+2s)\,dx\right| = \left|\int_s^{-2s} (x-s)^2(x-s+3s)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_s^{-2s} \{(x-s)^3 + 3s(x-s)^2\}\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}(x-s)^4 + s(x-s)^3\right]_s^{-2s}\right|$$

$$= \left|\frac{81}{4}s^4 - 27s^4\right| = \frac{27}{4}s^4$$

ここで，④のとき，右上のグラフより，$s < -\dfrac{1}{2}$ または $s > \dfrac{3}{2}$ となるので,

$$S(t) > \frac{27}{4}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|^4 = \frac{27}{64}$$

［解　説］

募集要項に記された微積分の拡張領域からの出題です。2015 年度からは，数学Ⅱの頻出タイプとなるでしょう。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

まず, 直線 l, m, n 上の点 P, Q, R は, p, q, r を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\vec{u}=(1,\ 0,\ -2)+p(2,\ 1,\ -1)=(1+2p,\ p,\ -2-p)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+q\vec{v}=(1,\ 2,\ -3)+q(1,\ -1,\ 1)=(1+q,\ 2-q,\ -3+q)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+r\vec{w}=(1,\ -1,\ 0)+r(1,\ 2,\ 1)=(1+r,\ -1+2r,\ r)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(q-2p,\ 2-q-p,\ -1+q+p)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$ から,

$$(q-2p)-(2-q-p)+(-1+q+p)=0,\ q-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(r-2p,\ -1+2r-p,\ 2+r+p)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\vec{w}=0$ より,

$$(r-2p)+2(-1+2r-p)+(2+r+p)=0,\ -p+2r=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=1$，$r=\frac{1}{2}p$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-2p,\ 1-p,\ p),\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(-\frac{3}{2}p,\ -1,\ \frac{3}{2}p+2\right)$$

これより，$F(p)=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ とおくと,

$$F(p)=(1-2p)^2+(1-p)^2+p^2+\left(-\frac{3}{2}p\right)^2+1+\left(\frac{3}{2}p+2\right)^2=\frac{21}{2}p^2+7$$

よって，$p=0$ すなわち $\mathrm{P}(1,\ 0,\ -2)$ のとき，$F(p)=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ は最小となり，最小値は 7 である。

［解　説］

空間における直線を題材にした基本題です。なお, 計算結果は予測を超えて簡単になります。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$$

これより，$a_n-1=(a_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ となり，$a_n=2^{n-1}+1$

(2)　n を自然数として，不等式 $a_n{}^2-2a_n>10^{15}\cdots\cdots$①に対して，(1)より，

$$a_n{}^2-2a_n=(a_n-1)^2-1=(2^{n-1})^2-1=2^{2(n-1)}-1$$

①に代入すると，$2^{2(n-1)}-1>10^{15}\cdots\cdots\cdots$②

ここで，n が 2 以上の自然数のとき $2^{2(n-1)}-1$ は奇数，また 10^{15} は偶数なので，$2^{2(n-1)}-1=10^{15}$ を満たす自然数 n は存在しない。

よって，②を満たす自然数 n は，$2^{2(n-1)}>10^{15}\cdots\cdots$③を満たす n と等しい。

さて，③の両辺に対数をとると，$\log_{10}2^{2(n-1)}>\log_{10}10^{15}$ から，

$$2(n-1)\log_{10}2>15，\ n-1>\frac{15}{2\log_{10}2}\cdots\cdots\cdots④$$

そこで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ から，$\dfrac{15}{0.6022}<\dfrac{15}{2\log_{10}2}<\dfrac{15}{0.6020}$ であり，

$$24.90<\frac{15}{2\log_{10}2}<24.92$$

よって，④を満たす自然数 n は，$n-1\geqq 25$ から $n\geqq 26$ となり，不等式①を満たす最小の自然数 n は 26 である。

［解　説］

細かい詰めや数値計算はやや面倒ですが，設問の流れは明快です。

5

問題のページへ

A の得点が k 点 $(2\leqq k\leqq 20)$ であるのは, A が k の目, B が $k-1$ 以下の目を出したときなので, その確率は, $\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{k-1}{20}=\dfrac{1}{400}(k-1)$ である。

すると, A の得点の期待値 E は,

$$E=\sum_{k=2}^{20}\frac{1}{400}k(k-1)=\frac{1}{400}\sum_{k=2}^{20}\frac{1}{3}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 21\cdot 20\cdot 19=\frac{133}{20}$$

［解　説］

期待値に関する基本題です。なお, 連続 2 整数の積の和については, 階差数列をつくるという方法で計算しています。