1

解答解説のページへ

座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 $\mathrm{B}(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

2 つの粒子が時刻 0 において△ABC の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の確率で移動する。この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

　$\triangle\mathrm{ABC}$ は，条件 $\angle\mathrm{B} = 2\angle\mathrm{A}$，$\mathrm{BC} = 1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき，$\cos\angle\mathrm{B}$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

実数の定数 a, b に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ で定める。すべての実数 x で不等式

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$$

が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

5

解答解説のページへ

自然数 $a,\ b$ はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる。このような $a,\ b$ の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A，B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする。このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

1　　　　問題のページへ

まず，直線 l, m, n 上の点 P, Q, R は，p, q, r を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\vec{u}=(1,\ 0,\ -2)+p(2,\ 1,\ -1)=(1+2p,\ p,\ -2-p)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+q\vec{v}=(1,\ 2,\ -3)+q(1,\ -1,\ 1)=(1+q,\ 2-q,\ -3+q)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+r\vec{w}=(1,\ -1,\ 0)+r(1,\ 2,\ 1)=(1+r,\ -1+2r,\ r)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(q-2p,\ 2-q-p,\ -1+q+p)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$ から，

$$(q-2p)-(2-q-p)+(-1+q+p)=0,\ q-1=0 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(r-2p,\ -1+2r-p,\ 2+r+p)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\vec{w}=0$ より，

$$(r-2p)+2(-1+2r-p)+(2+r+p)=0,\ -p+2r=0 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=1$，$r=\dfrac{1}{2}p$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-2p,\ 1-p,\ p),\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(-\frac{3}{2}p,\ -1,\ \frac{3}{2}p+2\right)$$

これより，$F(p)=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ とおくと，

$$F(p)=(1-2p)^2+(1-p)^2+p^2+\left(-\frac{3}{2}p\right)^2+1+\left(\frac{3}{2}p+2\right)^2=\frac{21}{2}p^2+7$$

よって，$p=0$ すなわち $\mathrm{P}(1,\ 0,\ -2)$ のとき，$F(p)=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ は最小となり，最小値は 7 である。

［解　説］

空間における直線を題材にした基本題です。なお，計算結果は予測を超えて簡単になります。

$\boxed{2}$

問題のページへ

頂点 A から移動し始めた粒子が, n 秒後に頂点 A にいる確率を a_n とおく。そして, 隣の頂点への移動確率は $\frac{1}{2}$ ずつなので, n 秒後に頂点 B, C にいる確率は, 対称性から, ともに $\frac{1}{2}(1-a_n)$ となり,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-a_n)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-a_n),\quad a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

すると, $a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$ となり, $a_1=0$ から,

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(a_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad a_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

さて, 2 つの粒子が, 頂点 A から独立に移動していくとき, n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ は,

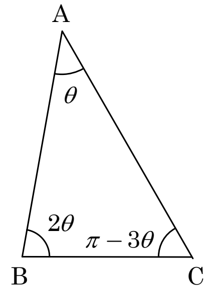
$$\begin{aligned}p(n)&=a_n{}^2+\left\{\frac{1}{2}(1-a_n)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(1-a_n)\right\}^2=\frac{3}{2}a_n{}^2-a_n+\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{6}\left\{1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。漸化式は 1 つの粒子の動きに注目して立て, その結果を用いて $p(n)$ を導いています。

3

問題のページへ



$\angle A=\theta$ とおくと，条件より，$\angle B=2\theta$，$\angle C=\pi-3\theta$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のもとで，正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin(\pi-3\theta)}$$

$$AB=\frac{\sin(\pi-3\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}=3-4\sin^2\theta$$

すると，$\triangle ABC$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(3-4\sin^2\theta)\sin 2\theta=\frac{1}{2}(1+2\cos 2\theta)\sin 2\theta$$

さらに，$\varphi=2\theta$ とおくと，$0<\varphi<\dfrac{2}{3}\pi$ のもとで，$S=\dfrac{1}{2}(1+2\cos\varphi)\sin\varphi$

$$S'=\frac{1}{2}(-2\sin\varphi)\sin\varphi+\frac{1}{2}(1+2\cos\varphi)\cos\varphi$$

$$=-\sin^2\varphi+\frac{1}{2}\cos\varphi+\cos^2\varphi=2\cos^2\varphi+\frac{1}{2}\cos\varphi-1$$

ここで，$S'=0$ とすると，$-\dfrac{1}{2}<\cos\varphi<1$ から $\cos\varphi=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ である。

そこで，$\cos\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ とおくと，右表から，$\varphi=\alpha$ で S は最大となり，このとき，

$$\cos\angle B=\cos\varphi=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$$

φ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

［解　説］

三角比の応用問題に，微分法の利用という味付けがされています。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

条件より，すべての実数 x に対して，$f(x) \leqq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$ から，

$$f(x)^3 - 2f(x)^2 - f(x) + 2 \geqq 0,\ \{f(x)-1\}\{f(x)+1\}\{f(x)-2\} \geqq 0$$

すると，$-1 \leqq f(x) \leqq 1$，$2 \leqq f(x)$ となる。

さて，$f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{x^2+x+1} = 0$ より，十分に大きな実数 x に対して，$2 \leqq f(x)$ は成立しない。

よって，$-1 \leqq f(x) \leqq 1$ から，$-1 \leqq \dfrac{ax+b}{x^2+x+1} \leqq 1$ であり，$x^2+x+1>0$ より，

$$-x^2 - x - 1 \leqq ax + b \cdots\cdots\cdots①,\ ax+b \leqq x^2+x+1 \cdots\cdots\cdots②$$

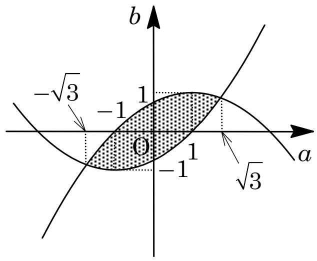
①より，$x^2+(a+1)x+b+1 \geqq 0$ となり，すべての実数 x に対して成立する条件は，

$$D = (a+1)^2 - 4(b+1) \leqq 0,\ b \geqq \frac{1}{4}(a+1)^2 - 1 \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$x^2-(a-1)x-b+1 \geqq 0$ となり，すべての実数 x に対して成立する条件は，

$$D = (a-1)^2 + 4(b-1) \leqq 0$$

$$b \leqq -\frac{1}{4}(a-1)^2 + 1 \cdots\cdots\cdots④$$



③④より，求める点 $(a,\ b)$ の範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

［解　説］

$f(x)$ の分母と分子の次数に注目すると，すべての x に対して，$f(x) \geqq 2$ は成り立たないことがわかります。この点を除くと，残りは数 I 風です。

5

問題のページへ

まず，自然数 a，b がどちらも 3 で割り切れないとき，a，b を 3 で割った余りと，a^3+b^3 を 3 で割った余りとの関係は，右表のようになる。

a \ b	1	2
1	2	0
2	0	1

すると，a^3+b^3 が 81 で割り切れるためには，3 で割った余りについて，a, b の一方が 1，他方が 2 であることが必要となる。

そこで，a，b に関する対称性より，$a=3k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，$b=3l-1$ $(l=1,\ 2,\ \cdots)$ の場合を考えると，

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&= (3k+1+3l-1)\{(3k+1)^2-(3k+1)(3l-1)+(3l-1)^2\}\\
&= 9(k+l)\{3(k^2-kl+l^2+k-l)+1\}
\end{aligned}
$$

これより，a^3+b^3 が 81 で割り切れる条件は，$3(k^2-kl+l^2+k-l)+1$ が 3 の倍数でないことより，$k+l$ が 9 の倍数となることである。すなわち，$k\geqq 0$，$l\geqq 1$ から $k+l\geqq 1$ となり，$k+l=9,\ 18,\ 27,\ \cdots$ である。

(i)　$k+l=9$ のとき

この場合をまとめると，右表のようになり，$(a,\ b)$ の組で a^2+b^2 の値が最小になるのは，$a+b=3\times 9=27$ から，

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
l	9	8	7	6	5	4	3	2	1
a	1	4	7	10	13	16	19	22	25
b	26	23	20	17	14	11	8	5	2

$$a^2+b^2=a^2+(27-a)^2=2a^2-54a+27^2=2\left(a-\frac{27}{2}\right)^2+\frac{27^2}{2}$$

よって，$(a,\ b)=(13,\ 14)$ のとき，a^2+b^2 は最小値 $13^2+14^2=365$ をとる。

(ii)　$k+l\geqq 18$ のとき

この場合は $a+b\geqq 3\times 18=54$ から，(i)と同様に考えると，a^2+b^2 の値が最小になるのは $a=b=27$ のときであるが，この値はともに 3 で割り切れるので，

$$a^2+b^2>27^2+27^2>365$$

(i)(ii)より，a^2+b^2 が最小となるのは，$(a,\ b)=(13,\ 14)$ のときである。

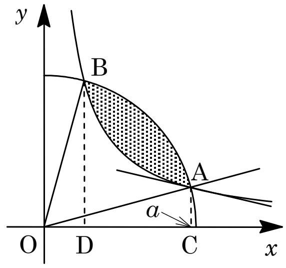
したがって，対称性を考え合わせると，$(a,\ b)=(13,\ 14)$，$(14,\ 13)$ において，a^2+b^2 は最小値 365 をとる。

［解　説］

試行錯誤が必要とされる京大らしい整数問題です。まず，3 で割った余りに注目して，絞り込みを行っています。ただ，後半は ab 平面をイメージした解答例のつもりですが，アバウトに記してしまいたいという誘惑に負けそうになっています。

6

解答解説のページへ



まず，双曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ と原点 O を中心とする円 C_2 の交点 A, B は，直線 $y = x$ に関して対称なので，点 A の x 座標 a を，$a > 1$ としておくことができる。

さて，$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ から，線分 OA と x 軸の正の部分とのなす角を α とすると，$\tan\alpha = \dfrac{1}{a^2}$ である。

次に，$y = \dfrac{1}{x}$ に対して $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ より，A における双曲線の接線 l と x 軸の正の部分とのなす角を β とおくと，$\tan\beta = -\dfrac{1}{a^2}$ である。

すると，l と OA のなす角 $\dfrac{\pi}{6}$ から $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{6}$ となり，$\tan(\alpha-\beta) = \tan\dfrac{\pi}{6}$ より，

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\dfrac{1}{a^2} - \left(-\dfrac{1}{a^2}\right)}{1 + \dfrac{1}{a^2}\left(-\dfrac{1}{a^2}\right)} = \frac{2a^2}{a^4 - 1},\quad a^4 - 2\sqrt{3}a^2 - 1 = 0$$

よって，$a^2 = \sqrt{3} + 2$ より，$\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$，すなわち $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$ であり，

$$\mathrm{OA} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \sqrt{\sqrt{3} + 2 + 2 - \sqrt{3}} = 2$$

ここで，対称性から $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a},\ a\right)$ なので，線分 OA, OB と C_1 によって囲まれた図形の面積を S_1，線分 OA, OB と C_2 によって囲まれた図形の面積を S_2 とおくと，

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

また，$\mathrm{C}(a,\ 0)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$ とおくと，$\triangle\mathrm{OAC}$ と $\triangle\mathrm{OBD}$ は合同であり，

$$S_1 = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{x}dx + \triangle\mathrm{OBD} - \triangle\mathrm{OAC} = \Big[\log x\Big]_{\frac{1}{a}}^{a} = \log a - \log\frac{1}{a} = 2\log a$$
$$= \log a^2 = \log(2 + \sqrt{3})$$

したがって，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積 S は，

$$S = S_2 - S_1 = \frac{2}{3}\pi - \log(2 + \sqrt{3})$$

［解 説］

$\tan\alpha = 2 - \sqrt{3}$ を満たす α は，$\alpha = \dfrac{\pi}{12}$ という知識を利用しています。もし，この関係を使わなければ，$\tan\beta = -\tan\alpha$ に注目して，x 軸，接線 l，線分 OA で二等辺三角形を作るという方法も考えられますが……。