1

解答解説のページへ

直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

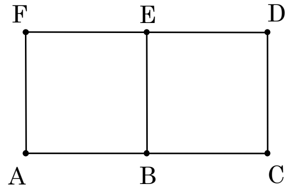
次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は$90°$である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

3

解答解説のページへ



6 個の点 A, B, C, D, E, F が右図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする。各線分をそれぞれ独立に確率 $\dfrac{1}{2}$ で赤または黒で塗る。赤く塗られた線分だけを通って点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする。そのような経路がない場合は X を 0 とする。このとき，$n=0,\ 2,\ 4$ について，$X=n$ となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。

5

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の有理数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ ，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

1　　問題のページへ

まず，$y=px+q$ ……①，$y=x^2-x$ ……②に対して，①と②が共有点をもつ条件は，①②を連立して，$x^2-x=px+q$，$x^2-(p+1)x-q=0$ から，

$$D=(p+1)^2+4q\geqq 0,\ q\geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

次に，$y=|x|+|x-1|+1$ ……④に対して，①と④が共有点をもたない条件は，

(i)　$x\leqq 0$ のとき　④は，$y=-x-(x-1)+1=-2x+2$ となり，①と連立して，

$$px+q=-2x+2,\ (p+2)x+q-2=0$$

すると，$(p+2\leqq 0$ かつ $q-2>0)$ または $(p+2\geqq 0$ かつ $q-2<0)$

(ii)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　④は，$y=x-(x-1)+1=2$ となり，①と連立して，

$$px+q=2,\ px+q-2=0$$

すると，$(q-2>0$ かつ $p+q-2>0)$ または $(q-2<0$ かつ $p+q-2<0)$

(iii)　$x\geqq 1$ のとき　④は，$y=x+(x-1)+1=2x$ となり，①と連立して，

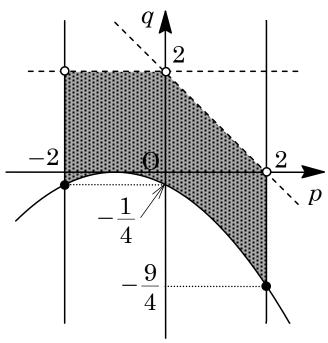
$$px+q=2x,\ (p-2)x+q=0$$

すると，$(p-2\geqq 0$ かつ $p+q-2>0)$ または $(p-2\leqq 0$ かつ $p+q-2<0)$

(ii)(iii)をまとめると，$(p\geqq 2$ かつ $q>2)$ または $(p\leqq 2$ かつ $q<2$ かつ $p+q<2)$

(i)を合わせて，①と④が共有点をもたない条件は，

$$-2\leqq p\leqq 2 \text{ かつ } q<2 \text{ かつ } p+q<2\ \cdots\cdots\cdots⑤$$



したがって，求める $(p,\ q)$ の条件は，③かつ⑤となり，それを図示すると右図の網点部となる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。

また，この範囲の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}(2+4)\cdot 2-\int_{-2}^{2}-\frac{1}{4}(p+1)^2dp$$

$$=6+\frac{1}{12}\Big[(p+1)^3\Big]_{-2}^{2}=6+\frac{1}{12}(27+1)=\frac{25}{3}$$

［解　説］

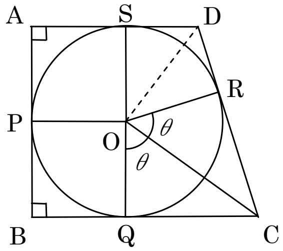
直球で勝負という感じの解法です。かなり時間がかかりました。共有点をもたない条件は図形的に解いた方がよかったようです。

2

問題のページへ

四角形ABCDについて，その内接円の中心をO，また内接円との接点をP, Q, R, S とおく。条件(a)より，90°の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)　90°の内角が隣り合う($\angle A=\angle B=90°$)のとき

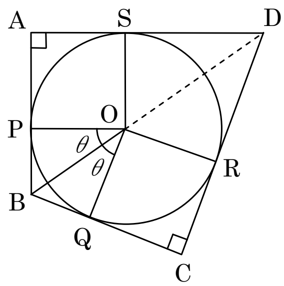


右図のように$\angle COQ=\angle COR=\theta$ $(0°<\theta<90°)$とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$となる。これより，四角形 ABCD の面積$S$は，

$$S=1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\geqq 2+2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}}=4$$

等号成立は$\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ $(\theta=45°)$のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)　90°の内角が向かい合う($\angle A=\angle C=90°$)のとき



右図のように$\angle BOP=\angle BOQ=\theta$ $(0°<\theta<90°)$とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$となる。これより，四角形 ABCD の面積$S$は，

$$S=1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$

(i)と同様に，四角形ABCDが正方形のときSは最小値4をとる。

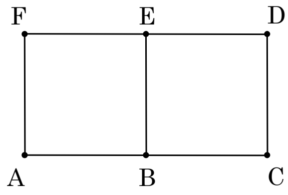
(i)(ii)より，四角形ABCDの面積の最小値は4である。

［解 説］

いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

3

問題のページへ



点 A から点 E に至る経路の最短のものの長さ X について,

(i)　$X=4$ のとき

A－B, B－C, C－D, D－E はすべて赤, B－E は黒, また, A－F と F－E は少なくとも一方が黒より, その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{3}{128}$$

(ii)　$X=2$ のとき

(a)　A－B と B－E がともに赤で, 他の線分は任意のとき

この場合の確率は, $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ となる。

(b)　A－F と F－E がともに赤で, 他の線分は任意のとき

この場合の確率は, $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ となる。

(c)　A－B, B－E, A－F, F－E がすべて赤で, 他の線分は任意のとき

この場合の確率は, $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ となる。

(a)～(c)より, $X=2$ のときの確率は, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$

(iii)　$X=0$ のとき

X の値は 0, 2, 4 だけなので, $X=0$ のときの確率は, 余事象を考えて,

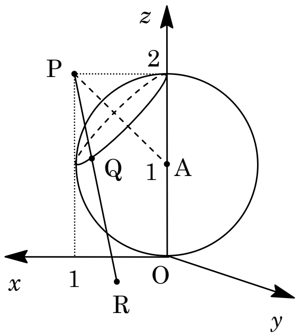
$$1-\frac{3}{128}-\frac{7}{16}=\frac{69}{128}$$

［解　説］

X の値としては, 問題文で示されている 3 つの場合しかなく, あっけなく解けてしまいます。

4

問題のページへ



中心を$A(0,\ 0,\ 1)$とする半径 1 の球面 S 上にあり，点$(0,\ 0,\ 2)$以外を動く点 Q に対し，点$P(1,\ 0,\ 2)$と点 Q を結ぶ直線 l が平面$z=0$と交わる点を$R(x,\ y,\ 0)$とおく。

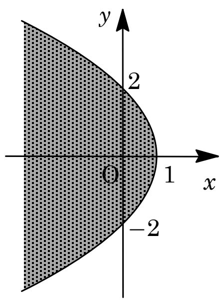
そして，$\overrightarrow{PA}$と$\overrightarrow{PR}$のなす角をθとし，直線 l が球面 S に接するとき，$\theta=45^\circ$であることに注目すると，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PR}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PR}|\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PR}|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{PA}=(-1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{PR}=(x-1,\ y,\ -2)$から，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PR}=-(x-1)+2=-x+3,\ |\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(-1)^2+0+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+5}$$



①に代入すると，$-x+3=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2-2x+5}$ となり，$x\leqq 3$のもとで，

$$(-x+3)^2=x^2+y^2-2x+5,\ x=-\frac{1}{4}y^2+1\cdots\cdots\cdots②$$

②は$x\leqq 3$を満たし，点 Q が球面 S 上を動くとき，点 R の動く範囲は，②を境界線とし原点を含む側である。

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

［解　説］

20 年以上も前になりますが，そのころ頻出していた点光源の問題です。内積を用いて円錐側面の式を立て，境界線を導いています。この方法の詳細は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

5

問題のページへ

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の有理数とするとき，$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ に対して，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$，余りを r とおくと，p, q, r は有理数となり，

$$f(x)=g(x)(px+q)+r \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，①から $h(x)=px+q+\dfrac{r}{g(x)}=px+q+\dfrac{r}{dx+e}$

ここで，n を 2 以上の整数とすると，条件より，$h(n-1)$，$h(n)$，$h(n+1)$ はすべて整数なので，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ の値も整数となり，

$$\begin{aligned}&h(n-1)+h(n+1)-2h(n)\\&=pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}+pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}-2\left(pn+q+\frac{r}{dn+e}\right)\\&=\frac{r}{dn-d+e}+\frac{r}{dn+d+e}-\frac{2r}{dn+e}\\&=\frac{2d^2r}{(dn-d+e)(dn+d+e)(dn+e)}\cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$

すると，十分に大きい n に対しても②が整数となることより，$r=0$ である。

よって，①から，$f(x)=g(x)(px+q)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

［解 説］

結論の $r=0$ を示すために，$h(n)$ の等差数列部分である $pn+q$ を消すことを考え，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ を計算しています。そして，得られた式が②というわけです。理系っぽい問題です。