1

解答解説のページへ

2 つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない。

2

解答解説のページへ

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

(1)　a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　$a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

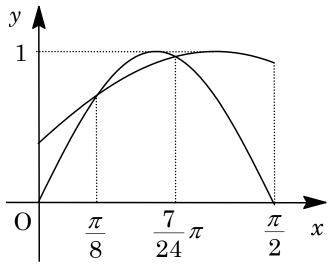
$\boxed{6}$

解答解説のページへ

2 つの関数を，$f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1$，2，… について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。このとき $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。

1

問題のページへ



$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$……①，$y=\sin 2x$……②を連立し，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin 2x$$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$から，$x+\frac{\pi}{8}=2x$または$x+\frac{\pi}{8}=\pi-2x$

よって，①②のグラフの交点は，$x=\frac{\pi}{8}$，$\frac{7}{24}\pi$となる。

さて，①②のグラフで囲まれる領域を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積Vは，

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\sin^2 2x-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}dx$$

ここで，$I_1=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\sin^2 2x\,dx$，$I_2=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)dx$とおくと，

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{4}\sin 4x\Big]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{3}{16}$$

また，$x+\frac{\pi}{8}=t$とおくと，$x=\frac{\pi}{8}\to\frac{7}{24}\pi$のとき$t=\frac{\pi}{4}\to\frac{5}{12}\pi$となり，

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\Big[t-\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{8}$$

以上より，$V=\pi(I_1-I_2)=\pi\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3}{16}-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{16}$

［解　説］

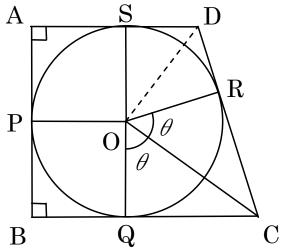
回転体の体積を求める基本題です。計算量も少なめです。なお，交点を求める際には，和積公式という手もあります。

2

問題のページへ

四角形 ABCD について，その内接円の中心を O，また内接円との接点を P, Q, R, S とおく。条件(a)より，$90°$ の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)　$90°$ の内角が隣り合う $(\angle A=\angle B=90°)$ のとき



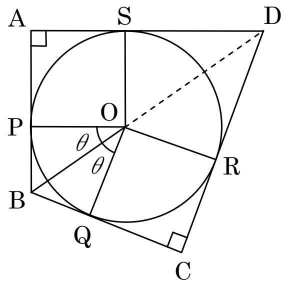
右図のように $\angle COQ=\angle COR=\theta\ (0°<\theta<90°)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$

$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\geqq 2+2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}}=4$$

等号成立は $\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}\ (\theta=45°)$ のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)　$90°$ の内角が向かい合う $(\angle A=\angle C=90°)$ のとき



右図のように $\angle BOP=\angle BOQ=\theta\ (0°<\theta<90°)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$

$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$

(i)と同様に，四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

［解　説］

いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

3

問題のページへ

(1)　$y=e^x+1$ に対して，$y'=e^x$ となり，点 $(t,\ e^t+1)$ における接線の方程式は，

$$y-(e^t+1)=e^t(x-t),\ \ y=e^tx-(t-1)e^t+1\ \cdots\cdots\cdots①$$

①が $(a,\ 0)$ を通ることより，$e^ta-(t-1)e^t+1=0$ となり，

$$e^ta=(t-1)e^t-1,\ \ a=-e^{-t}+t-1\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(t)=-e^{-t}+t-1$ とおくと，$f'(t)=e^{-t}+1>0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+t-1)=\infty,\ \ \lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}(-e^{-t}+t-1)=-\infty$$

よって，$f(t)$ は単調増加し，任意の実数値をとり得る。

すなわち，方程式②は任意の a に対してただ 1 つの実数解をもつことより，点 $(a,\ 0)$ を通る接線①は，ただ 1 つ存在する。

(2)　条件を②に適用すると，$a_n=-e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}-1$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=e^{-a_{n+1}}+1>1\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$a_1=1$ から，$a_n>1+(n-1)\cdot 1=n\ \ (n\geqq 2)$

よって，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となるので，③より，

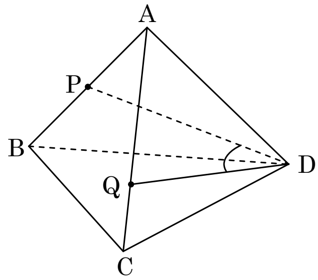
$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(e^{-a_{n+1}}+1)=1$$

［解 説］

頻出の接線の本数の問題です。(2)では，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ であることを示すのがポイントです。③の不等号に気づくかどうかだけですが。

4

問題のページへ



まず，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{c}$ とおくと，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

さて，点 P は辺 AB の中点，点 Q は辺 AC 上の点より，$0\leqq t\leqq 1$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{DQ}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{c}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+2\cdot\dfrac{1}{2}+1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}|=\sqrt{t^2\cdot1^2+2t(1-t)\cdot\frac{1}{2}+(1-t)^2\cdot1^2}=\sqrt{t^2-t+1}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{1}{2}t\cdot1^2+\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(t+2)$$

これより，$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\dfrac{\frac{1}{4}(t+2)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t^2-t+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{(t+2)^2}{t^2-t+1}}$ ………(＊)

そこで，$f(t)=\dfrac{(t+2)^2}{t^2-t+1}$ とおくと，$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{f(t)}$ となり，

$$f'(t)=\frac{2(t+2)(t^2-t+1)-(t+2)^2(2t-1)}{(t^2-t+1)^2}=\frac{(t+2)(-5t+4)}{(t^2-t+1)^2}$$

$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\dfrac{4}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{14^2}{21}$ をとる。

t	0	…	$\frac{4}{5}$	…	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗	$\frac{14^2}{21}$	↘	

よって，(＊)から，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値は，$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{14^2}{21}}=\dfrac{14}{6\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ である。

［解　説］

正四面体を題材とした空間ベクトルの図形への応用問題です。方針に迷うようなことはないでしょう。また，同じことですが，△PDQ に余弦定理という方法も考えられます。

$\boxed{5}$

問題のページへ

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数とするとき，$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ に対して，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$，余りを r とおくと，p, q, r は実数となり，

$$f(x)=g(x)(px+q)+r \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，①から $h(x)=px+q+\dfrac{r}{g(x)}=px+q+\dfrac{r}{dx+e}$

ここで，n を 2 以上の整数とすると，条件より，$h(n-1)$，$h(n)$，$h(n+1)$ はすべて整数なので，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ の値も整数となり，

$$\begin{aligned}
&h(n-1)+h(n+1)-2h(n)\\
&=pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}+pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}-2\Big(pn+q+\frac{r}{dn+e}\Big)\\
&=\frac{r}{dn-d+e}+\frac{r}{dn+d+e}-\frac{2r}{dn+e}\\
&=\frac{2d^2r}{(dn-d+e)(dn+d+e)(dn+e)} \cdots\cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

すると，十分に大きい n に対しても②が整数となることより，$r=0$ である。

よって，①から，$f(x)=g(x)(px+q)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

［解 説］

結論の $r=0$ を示すために，$h(n)$ の等差数列部分である $pn+q$ を消すことを考え，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ を計算しています。そして，得られた式が②というわけです。階差を 2 回とったと考えてもよいですが……。なお，既視感があったので，過去問を調べたところ，1991 年の後期に類題が出ていました。

6

問題のページへ

まず，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2}$ または $x_n=\dfrac{x_{n-1}+1}{2}$ から，帰納的に $0<x_n<1$ である。

そこで，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となる確率を Q_n とおくと，条件より $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率が P_n より，$\dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率は P_n-Q_n，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となる確率は $1-P_n$ である。

さて，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となるのは，$0<x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ のときより，

$$Q_n=\frac{1}{2}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1}),\ Q_n=\frac{1}{2}P_{n-1}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となるのは，$\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ または $\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ のときより，

$$1-P_n=\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1})+\frac{1}{2}(1-P_{n-1}),\ Q_{n-1}=-1+2P_n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-1+2P_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_{n-1}$，$P_{n+1}=\dfrac{1}{4}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}$

$$P_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{2}{3}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_1=f_0(x_0)=\dfrac{1}{4}$ または $x_1=f_1(x_0)=\dfrac{3}{4}$ から，$P_0=1$，$P_1=\dfrac{1}{2}$

(i)　$n=2k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k}-\dfrac{2}{3}=\left(P_0-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii)　$n=2k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k+1}-\dfrac{2}{3}=\left(P_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k+1}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

［解　説］

与えられた関数は，数直線上で，点 x と原点との中点または点 x と点 1 との中点を出力するという意味をもちます。このことに着目して，初めは樹形図を書いたり，さらに 2^n を 3 で割った余りを考えたりして，大雑把に結論は出ました。ただ，突っ込みどころが多すぎたため，考えを改め，状態を 3 つに分けて確率漸化式の出番となったわけです。