1

解答解説のページへ

xy 平面内の領域 $x^2+y^2\leqq 2$，$|x|\leqq 1$ で，曲線 $C : y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ。

2　解答解説のページへ

ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある。「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする。この装置のボタンを 20 回押したとき, 1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である。1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには, この装置のボタンを最低何回押せばよいか。必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

n を 4 以上の自然数とする。数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，$2^{12} = 1331$ が成り立っている。このとき n はいくつか。十進法で答えよ。

4

解答解説のページへ

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

5

解答解説のページへ

実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ)　方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。

1

問題のページへ

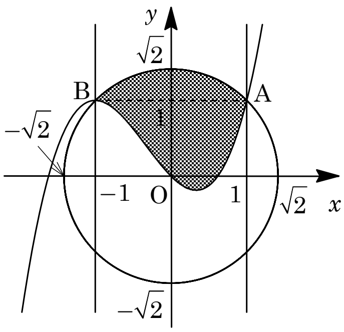
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	1	↘	$-\frac{5}{27}$	↗

曲線$C: y = x^3 + x^2 - x$に対して,

$$y' = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$$

これより，増減は右表のようになる。

さて，領域　$x^2 + y^2 \leqq 2$，$|x| \leqq 1$で，曲線　Cの上側にある部分は，右図の網点部となる。



ここで，A$(1,\ 1)$，B$(-1,\ 1)$とおき，網点部の領域について，線分　AB　より上側の面積をS_1，下側の面積をS_2とおくと，$\angle\mathrm{AOB} = 90°$から，

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{-1}^{1}\{1 - (x^3 + x^2 - x)\}dx$$

$$= 2\int_0^1 (-x^2 + 1)dx = 2\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4}{3}$$

よって，網点部の領域の面積Sは，

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$$

［解　説］

微積分の基本問題です。計算も簡単です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

ボタンを 1 回押したとき，はずれの確率を p $(0\leqq p\leqq 1)$ とおくと，あたりの確率は $1-p$ となる。ここで，条件から，ボタンを 20 回押したとき，1 回以上あたりの出る確率は 36%であるので，$1-p^{20}=0.36$ となり，

$$p^{20}=0.64,\ \ p^{10}=0.8=\frac{4}{5},\ \ p=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{10}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，ボタンを n 回押したとき，1 回以上あたりの出る確率が 90%以上となるのは，

$$1-p^n\geqq 0.9,\ \ p^n\leqq 0.1$$

$(*)$を代入すると，$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{10}}\leqq\frac{1}{10}$ となり，両辺に対数をとり $\frac{n}{10}\log_{10}\frac{4}{5}\leqq\log_{10}\frac{1}{10}$ から，

$$n(2\log_{10}2-1+\log_{10}2)\leqq -10,\ \ n(1-3\log_{10}2)\geqq 10$$

よって，$n\geqq\frac{10}{1-3\log_{10}2}$ である。

ここで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ から，$0.0967<1-3\log_{10}2<0.0970$ となり，

$$103.0<\frac{10}{1-3\log_{10}2}<103.5$$

したがって，$n\geqq 104$ となり，ボタンを最低 104 回押せばよい。

［解　説］

よく見かけるタイプの確率と対数計算の融合です。なお，初めは，あたりの確率を p としていましたが……。

3

問題のページへ

$n \geqq 4$ のとき，n 進法を十進法に直すと，

$$2_{(n)} = 2,\ 12_{(n)} = n+2,\ 1331_{(n)} = n^3+3n^2+3n+1$$

すると，条件より，n 進法で $2^{12} = 1331$ から，十進法では，

$$2^{n+2} = n^3+3n^2+3n+1,\ 2^{n+2} = (n+1)^3$$

ここで，$l = n+1$ とおくと，l は 5 以上の自然数となり，$2^{l+1} = l^3$ ………(＊)

(＊)を満たす l は 5 以上の 2 の累乗数になり，最小の $l = 2^3 = 8$ のときは，

$$2^{l+1} = 2^{8+1} = 2^9,\ l^3 = (2^3)^3 = 2^9$$

よって，(＊)は成立している。

そこで次に，$l \geqq 9$ のときは，$2^{l+1} > l^3$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$l = 9$ のとき　$2^{l+1} = 2^{10} = 1024$，$l^3 = 9^3 = 729$ より成立。

(ii)　$l = k$ のとき　$2^{k+1} > k^3$ と仮定すると，$2^{k+2} > 2k^3$ ………①

ここで，$2k^3-(k+1)^3 = k^3-3k^2-3k-1$ より，x を 9 以上の実数として，

$$f(x) = x^3-3x^2-3x-1$$

$$f'(x) = 3x^2-6x-3 = 3(x^2-2x-1) = 3\{(x-1)^2-2\}$$

これより，$x \geqq 9$ で $f'(x) > 0$ となり，$f(x) \geqq f(9) = 2\cdot 9^3-10^3 > 0$ である。

よって，$k^3-3k^2-3k-1 > 0$，すなわち $2k^3 > (k+1)^3$ ………②

①②より，$2^{k+2} > (k+1)^3$ となり，$l = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$l \geqq 9$ のとき，$2^{l+1} > l^3$ である。

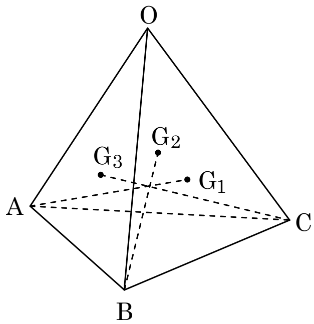
以上より，(＊)を満たす l は $l = 8$ だけとなり，このとき n の値は $n = 7$ である。

［解 説］

記数法を題材とした整数問題です。詰めの部分は，指数関数と 3 次関数のグラフを対応させて明らかとするとアバウトすぎると思い，数学的帰納法で，しかも関数まで設定して無理やり押さえ込んでいます。

4

問題のページへ



まず，四面体 OABC の面 OBC，面 OCA，面 OAB の重心を，それぞれ $\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$，$\mathrm{G_3}$ とおく。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AG_1}}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

ここで，条件より，A から面 OBC に下ろした垂線の足が $\mathrm{G_1}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AG_1}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AG_1}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{BG_2}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$ から，$\overrightarrow{\mathrm{BG_2}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{BG_2}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{BG_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0,\ |\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BG_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}-3\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{CG_3}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$ から，$\overrightarrow{\mathrm{CG_3}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CG_3}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CG_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0,\ |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CG_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

すると，①⑥より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，②④より $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，③⑤より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ となり，k を定数として，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=k\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

これより，①⑥は $|\vec{b}|^2=2k$，②④は $|\vec{c}|^2=2k$，③⑤は $|\vec{a}|^2=2k$ となり，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2k}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}$ から，⑦⑧を代入すると，$k=(\sqrt{2k})^2\cos\angle\mathrm{BOC}$

$$\cos\angle\mathrm{BOC}=\frac{1}{2},\ \angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{3}$$

同様にすると，$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$ となり，四面体 OABC の面はすべて合同な正三角形である。すなわち，四面体 OABC は正四面体である。

［解　説］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。連立方程式をまとめていくのがポイントです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

実数係数の3次方程式$f(x)=0$の虚数解をγとすると，その共役複素数$\overline{\gamma}$も解となる。そして，もう1つの解をβとおくと，解と係数の関係より，

$$\beta+\gamma+\overline{\gamma}=-a,\ \beta=-a-(\gamma+\overline{\gamma})$$

よって，βは実数となり，$f(x)=0$は実数解β，虚数解γ，$\overline{\gamma}$をもつ。

さて，条件から，β^3，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$も$f(x)=0$の解であり，$\beta^3\neq\beta$とすると，$\beta^3\neq\gamma$，$\beta^3\neq\overline{\gamma}$から，$f(x)=0$の解が少なくとも4個存在することになり不適である。

よって，$\beta^3=\beta$ $(\beta=0,\ \pm1)$である。また，γは虚数より$\gamma^3\neq\gamma$である。

(i)　$\beta=0$のとき　$f(x)=0$の解は0，γ，$\overline{\gamma}$，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$となり，

(i-i)　$\gamma^3=0$のとき　$\gamma=0$となり不適である。

(i-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$のとき　両辺に共役複素数をとると$(\overline{\gamma})^3=\gamma$となる。

そこで，p, qを実数として$\gamma=p+qi$ $(q\neq0)$とおくと，

$$(p+qi)^3=p-qi,\ (p^3-3pq^2)+(3p^2q-q^3)i=p-qi$$

これより，$p^3-3pq^2=p$ ……①，$3p^2q-q^3=-q$ ……②

①より$p=0$または$p^2-3q^2=1$，②より$3p^2-q^2=-1$ ……②′となる。

(a)　$p=0$のとき　②′から$q^2=1$となり$q=\pm1$

このとき，$f(x)=0$の解は$x=0,\ \pm i$であり，

$$f(x)=x(x+i)(x-i)=x(x^2+1)=x^3+x$$

(b)　$p^2-3q^2=1$のとき　②′から$3(3q^2+1)-q^2=-1$，$8q^2+4=0$で不適。

(ii)　$\beta=1$のとき　$f(x)=0$の解は1，γ，$\overline{\gamma}$，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$となり，

(ii-i)　$\gamma^3=1$のとき　両辺に共役複素数をとると$(\overline{\gamma})^3=1$となる。

すると，$(\gamma-1)(\gamma^2+\gamma+1)=0$となり，$\gamma\neq1$から$\gamma=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このとき，$f(x)=0$の解は$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$であり，

$$f(x)=(x-1)\Bigl(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\Bigr)\Bigl(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\Bigr)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

(ii-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$のとき　(i-ii)と同様にすると，$f(x)=0$の解は$x=1,\ \pm i$であり，

$$f(x)=(x-1)(x+i)(x-i)=(x-1)(x^2+1)=x^3-x^2+x-1$$

(iii)　$\beta=-1$のとき　$f(x)=0$の解は-1，γ，$\overline{\gamma}$，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$となり，

(iii-i)　$\gamma^3=-1$のとき　両辺に共役複素数をとると$(\overline{\gamma})^3=-1$となる。

すると，$(\gamma+1)(\gamma^2-\gamma+1)=0$となり，$\gamma\neq-1$から$\gamma=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このとき，$f(x)=0$の解は$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$であり，

$$f(x)=(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

(iii-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　(i-ii)と同様にすると，$f(x)=0$ の解は $x=-1$, $\pm i$ であり，

$$f(x)=(x+1)(x+i)(x-i)=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$$

(i)～(iii)より，求める 3 次式は,

$$x^3+x\,,\ x^3-1\,,\ x^3+1\,,\ x^3-x^2+x-1\,,\ x^3+x^2+x+1$$

［解 説］

3 次方程式の異なる複素数解は高々3 個ということを利用した解答例です。まず, β^3 に注目し，次に γ^3 に注目して場合分けを行っています。ただ，その論理を丁寧に記述するには, 時間がかなり必要でした。