$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，関数 $f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

素数 p, q を用いて，p^q+q^p と表される素数をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

4

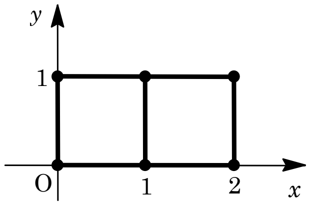
解答解説のページへ

xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で，$|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0\leqq y\leqq\log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は 1 より大きい定数とする。

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ



xy 平面上の 6 個の点$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$が図のように長さ 1 の線分で結ばれている。動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。

規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する。

たとえば，X が$(2,\ 0)$にいるときは，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$のいずれかに$\dfrac{1}{2}$の確率で移動する。また X が$(1,\ 1)$にいるときは，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$のいずれかに$\dfrac{1}{3}$の確率で移動する。

時刻 0 で動点 X が$\mathrm{O}=(0,\ 0)$から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

複素数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　$f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる。

(ロ)　$f(x)$ の係数 $a,\ b$ の少なくとも一方は虚数である。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$ に対し，

$$\begin{aligned}
f_n{}'(\theta) &= -\sin\theta\sin^{n-1}\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\cos\theta \\
&= \sin^{n-2}\theta\{-\sin^2\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\cos\theta\} \\
&= \sin^{n-2}\theta(\cos\theta+1)\{\cos\theta-1+(n-1)\cos\theta\} \\
&= \sin^{n-2}\theta(\cos\theta+1)(n\cos\theta-1)
\end{aligned}$$

すると，$0<\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{2}$ から，$\cos\alpha=\dfrac{1}{n}$ となる α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に 1 つ存在し，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f_n(\theta)$ の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f_n{}'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f_n(\theta)$ の最大値 M_n は，

$$\begin{aligned}
M_n &= f_n(\alpha)=(1+\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}$$

(2)　(1)から，$(M_n)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n^2-n}{2}}$ となり，$I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ とおくと，

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}
\end{aligned}$$

［解　説］

微分と極限の融合問題です。(1)の結論である M_n の式は，(2)の極限における e と相性の良さをほのめかすものとなっています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

素数 p, q に対して，$n=p^q+q^p$ とおく。ここで, n が素数である p, q の条件を求めるとき，対称性から $p \leqq q$ としても一般性は失われない。

まず, p が 3 以上のときは，素数 p, q はともに奇数になり，p^q，q^p もともに奇数である。よって, n は偶数となり素数ではない。

これより，$p=2$ となり，$n=2^q+q^2$ と表される。

さらに，$q=2$ のときは，$n=2^2+2^2=8$ となり, n は素数ではない。

また，$q=3$ のときは，$n=2^3+3^2=17$ となり, n は素数となる。

さて, q が 5 以上の素数のとき, 2 の倍数でもなく, かつ 3 の倍数でもないことに着目すると, k を自然数として，$q=6k\pm1$ と表せる。

(i)　$q=6k+1$ のとき

$$n=2^{6k+1}+(6k+1)^2=2\cdot 64^k+36k^2+12k+1$$

ここで，N_1 を整数とすると，$64^k=(3\cdot 21+1)^k=3N_1+1$ となるので,

$$n=2(3N_1+1)+36k^2+12k+1=3(2N_1+12k^2+4k+1)$$

よって, n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(ii)　$q=6k-1$ のとき

$$n=2^{6k-1}+(6k-1)^2=32\cdot 64^{k-1}+36k^2-12k+1$$

ここで，N_2 を整数とすると，$64^{k-1}=(3\cdot 21+1)^{k-1}=3N_2+1$ となるので,

$$n=32(3N_2+1)+36k^2-12k+1=3(32N_2+12k^2-4k+11)$$

よって, n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)(ii)より, q が 5 以上の素数のとき, n は素数にならない。

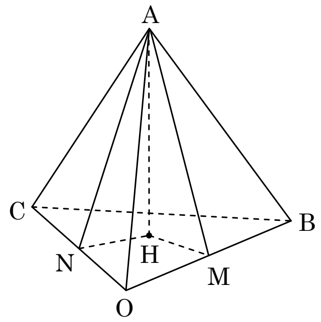
以上より，p^q+q^p と表される素数は 17 だけである。

［解　説］

演習しておきたい素数がらみの整数問題です。まず, 2 以外の素数は奇数という頻出事項でふるいにかけて p の値を決め, 次に q の値を 2, 3, 5, 7, 11 として n の値を計算すると, 5 以上では 3 の倍数であることがわかります。ただ, q が奇数ということだけでは，$q=9$ で n が素数となることから考え直し, その結果, q を 6 で割った余りで分類とした解答例となったわけです。なお, 二項展開を用いる箇所は, 省略気味に記しています。

3

問題のページへ



四面体 OABC において，頂点 A から面 OBC に下ろした垂線の足を H，また辺 OB，OC の中点をそれぞれ M，N とおく。

条件より，点 H は△OBC の外心なので，

$$\mathrm{HM}\perp\mathrm{OB}\quad \text{かつ}\quad \mathrm{HN}\perp\mathrm{OC}$$

すると，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HM}\perp\mathrm{OB}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{OB}$ となる。すなわち，△AOB は $\mathrm{AO}=\mathrm{AB}$ の二等辺三角形である。

同様に，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HN}\perp\mathrm{OC}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AN}\perp\mathrm{OC}$ となる。すなわち，△AOC は $\mathrm{AO}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

したがって，$\mathrm{AO}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

また，頂点 B から面 OCA に下ろした垂線の足が△OCA の外心なので，同様にすると，$\mathrm{BO}=\mathrm{BC}=\mathrm{BA}$ である。

さらに，頂点 C から面 OAB に下ろした垂線の足が△OAB の外心なので，同様にすると，$\mathrm{CO}=\mathrm{CA}=\mathrm{CB}$ である。

以上より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，四面体 OABC は正四面体である。

［解 説］

空間図形の証明問題です。同じ構図の問題で「重心」となっているのが文系で出題されていますが，そこではベクトル利用で解答例をつくりました。それに対して，理系では「外心」ですので，ベクトルでの表現が難しく，ここでは三垂線の定理を適用した解答例にしています。

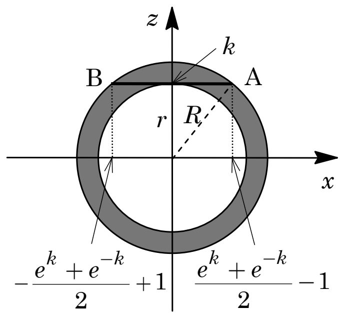
$\boxed{4}$

問題のページへ

図形 D: $y=z$, $|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$, $0\leqq y\leqq\log a$ $(a>1)$ を y 軸に垂直な平面 $y=k$ で切断したときの切り口は,

$$z=k,\ |x|\leqq\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1,\ 0\leqq k\leqq\log a$$

平面 $y=k$ 上で図示すると, 右図の線分 AB となる。



さて, この線分を y 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R, 内径を r とすると,

$$R=\sqrt{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2},\ r=k$$

このドーナツ形の面積を $S(k)$ とすると,

$$S(k)=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left\{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2\right\}-\pi k^2=\pi\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)$$

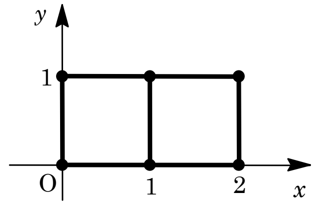
したがって, 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V=\int_0^{\log a}S(k)dk=\frac{\pi}{4}\int_0^{\log a}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)dk$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2k}-\frac{1}{2}e^{-2k}-4e^k+4e^{-k}+6k\right]_0^{\log a}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{2}(a^2-1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)-4(a-1)+4\left(\frac{1}{a}-1\right)+6\log a\right\}$$
$$=\pi\left(\frac{a^2}{8}-\frac{1}{8a^2}-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\right)$$

［解　説］

空間図形の回転体の体積を求める問題です。回転軸に垂直な平面での切り口の面積を求め, それを回転軸方向に積分することで体積を計算するという基本に従っています。見かけよりはスムーズに進みます。

$\boxed{5}$ 問題のページへ



まず，n 秒後に X の x 座標が 0，1 である確率をそれぞれ p_n，q_n とおくと，X の x 座標が 2 である確率は $1-p_n-q_n$ となる。

ここで，条件より，$p_0=1$，$q_0=0$ で，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{2}(1-p_n-q_n)\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$q_{n+1}=-\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{2}$ となり，$q_{n+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(q_n-\frac{3}{7}\right)$ から，

$$q_n-\frac{3}{7}=\left(q_0-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^n=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって，$q_n=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ となり，①に代入すると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\cdots\cdots\cdots③$$

③を満たす 1 つの数列を，α，β を定数として，$p_n=\alpha+\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ とおくと，

$$\alpha+\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

すると，$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{7}$，$-\frac{1}{6}\beta=\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{7}$ から，$\alpha=\frac{2}{7}$，$\beta=\frac{3}{14}$ となり，

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\cdots\cdots\cdots④$$

③－④より，$p_{n+1}-\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left\{p_n-\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$ となり，

$$p_n-\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n=\left\{p_0-\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって，求める確率 p_n は，$p_n=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

［解　説］

確率と漸化式の融合問題です。漸化式を立式する段階は基本的ですが，その解法にはいろいろなスタイルが考えられます。なお，解答例の方法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

$\boxed{6}$

問題のページへ

複素数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ に対し，$f(x)=0$ の解を α，β とすると，

$\alpha+\beta=-a$ ………①，$\alpha\beta=b$ ………②

また，条件(イ)より，6 次式 $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れるので，$q(x)$ を 4 次式として，

$f(x^3)=f(x)q(x)$

これより，$x^6+ax^3+b=(x-\alpha)(x-\beta)q(x)$ となり，

$\alpha^6+a\alpha^3+b=0$ ………③，$\beta^6+a\beta^3+b=0$ ………④

①②を③に代入すると，$\alpha^6-(\alpha+\beta)\alpha^3+\alpha\beta=0$，$(\alpha^3-\alpha)(\alpha^3-\beta)=0$ ………⑤

①②を④に代入すると，$\beta^6-(\alpha+\beta)\beta^3+\alpha\beta=0$，$(\beta^3-\beta)(\beta^3-\alpha)=0$ ………⑥

すると，⑤⑥から，次の 4 つの場合が考えられる。

(i)　$\alpha^3-\alpha=0$ かつ $\beta^3-\beta=0$ のとき

このとき，$\alpha=0,\ \pm1$ かつ $\beta=0,\ \pm1$ となる。しかし，このいずれの $(\alpha,\ \beta)$ の組合せに対しても，①②より a, b はともに実数であり，条件(ロ)に反する。

(ii)　$\alpha^3-\alpha=0$ かつ $\beta^3-\alpha=0$ のとき

このとき，$\alpha=0,\ \pm1$ かつ $\beta^3=\alpha$ となる。

まず，$\alpha=0$ のときは $\beta=0$ となり，$a,\ b$ はともに実数であり，条件(ロ)に反する。

また，$\alpha=1$ のときは $\beta^3=1$ となり，$(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

すると，条件(ロ)から $\beta\neq1$ となり，$\beta^2+\beta+1=0$ より $\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，①から $a=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，②から $b=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$f(x)=x^2-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき，①から $a=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$，②から $b=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$f(x)=x^2-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

さらに，$\alpha=-1$ のときは $\beta^3=-1$ となり，$(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

すると，条件(ロ)から $\beta\neq-1$ となり，$\beta^2-\beta+1=0$ より $\beta=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

$\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，①から $a=-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，②から $b=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$f(x)=x^2+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき，①から $a=-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，②から $b=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$f(x)=x^2+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

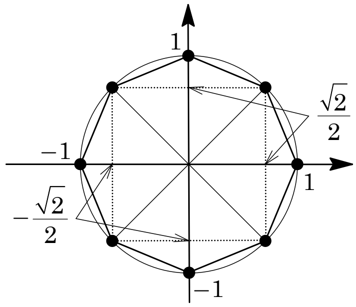
(iii) $\alpha^3-\beta=0$ かつ $\beta^3-\beta=0$ のとき

α，β の対称性から，$f(x)$ は(ii)の場合に一致する。

(iv) $\alpha^3-\beta=0$ かつ $\beta^3-\alpha=0$ のとき

このとき，$\alpha^9-\alpha=0$ かつ $\beta=\alpha^3$ となるが，$\alpha=0$ のときは $\beta=0$ となり，条件(ロ)に反する。

よって，$\alpha^8=1$ であり，α を複素数平面上に図示すると，右図の 8 つの点が対応する。



$\alpha=\pm1$ のときは複号同順で $\beta=\pm1$ となるが，条件(ロ)に反する。

$\alpha=\pm i$ のときは複号同順で $\beta=\mp i$ となるが，条件(ロ)に反する。

$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$ のときは複号同順で $\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ となる。①から $a=\mp\sqrt{2}i$，②から $b=-1$ となり，

$$f(x)=x^2-\sqrt{2}ix-1,\ f(x)=x^2+\sqrt{2}ix-1$$

$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ のときは複号同順で $\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$ となり，α，β の対称性から，$a=\mp\sqrt{2}i$，$b=-1$ の場合に一致する。

(i)〜(iv)より，求める 2 次式は，

$$x^2-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ x^2-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ x^2+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$x^2+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ x^2-\sqrt{2}ix-1,\ x^2+\sqrt{2}ix-1$$

［解　説］

息の長い議論を支えるエネルギーが必要です。初めは，$f(x^3)$ を $f(x)$ で割ろうとセンター風に考えましたが，途中で方向転換をしたため，解と係数の関係をもとにした解答例になっています。つまり，a，b，α，β について，①から④までの連立方程式を解くというわけです。ただ，基本対称式にこだわりすぎると，計算の深みにはまってしまいますが……。