1

解答解説のページへ

曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする。直線 l は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする。また，l の傾きは負であるとする。このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

(1)　100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

(2)　100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間において原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P，Q と，m 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき，△PQR の面積が最小となるような P，Q，R の座標を求めよ。

4

解答解説のページへ

p, q を自然数，α，β を，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　次の条件 (A) $\tan(\alpha+2\beta)=2$ を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ のうち，$q\leqq 3$ であるものをすべて求めよ。

(2)　条件(A)を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ で，$q>3$ であるものは存在しないことを示せ。

5

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1)　$X=1$ である確率を求めよ。

(2)　$X=5$ である確率を求めよ。

1

問題のページへ

曲線 $C: y=x^3-4x+1$ ……①に対して $y'=3x^2-4$ となるので，点 $(t,\ t^3-4t+1)$ における接線 l の方程式は,

$$y-(t^3-4t+1)=(3t^2-4)(x-t),\ \ y=(3t^2-4)x-2t^3+1 \cdots\cdots\cdots ②$$

②が $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通ることより，$0=3(3t^2-4)-2t^3+1$

$$2t^3-9t^2+11=0,\ (t+1)(2t^2-11t+11)=0$$

これより，$t=-1,\ \dfrac{11\pm\sqrt{33}}{4}$ となる。

さて，l の傾きは負なので，$3t^2-4<0$ すなわち $-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}<t<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ ……③となり,

$$-\frac{2}{3}\sqrt{3}<-1,\ \frac{11+\sqrt{33}}{4}>\frac{11-\sqrt{33}}{4}>\frac{11-6}{4}=1.25>1.2=\frac{2}{3}\times1.8>\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

よって，③を満たす t は，$t=-1$ だけであり，このとき②から,

$$l: y=-x+3 \cdots\cdots\cdots ④$$

そこで，①④を連立すると，$x^3-4x+1=-x+3$ となり,

$$x^3-3x-2=0,\ (x+1)^2(x-2)=0$$

すると，$x=-1,\ 2$ となり，$-1\leqq x\leqq 2$ において C と l の上下関係は変わらないので，C と l で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\left|\int_{-1}^{2}\{(x^3-4x+1)-(-x+3)\}dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx\right|$$

$$=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x+1-3)dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}\{(x+1)^3-3(x+1)^2\}dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{4}(x+1)^4-(x+1)^3\right]_{-1}^{2}\right|=\left|\frac{1}{4}\cdot3^4-3^3\right|=\frac{27}{4}$$

［解 説］

3 次曲線と接線に囲まれた部分の面積を求める超頻出問題です。計算が面倒なのは, t の値を絞り込む箇所ぐらいです。

© 電送数学舎 2017

2

問題のページへ

(1)　2 以外の素因数をもたない自然数は，m を整数として，2^0，2^1，2^2，…，2^m と表される。そのうち，100 桁以下のものは，$2^m<10^{100}$ から，

$$m\log_{10}2<100,\ m<\frac{100}{\log_{10}2}$$

ここで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ から $332.1<\dfrac{100}{\log_{10}2}<332.3$ となり，$m\leqq 332$ より，100 桁以下で 2 以外の素因数をもたない自然数の個数は 333 である。

(2)　2 と 5 以外の素因数をもたない 100 桁の自然数は，m, n を 0 以上の整数として，

$$10^{99}\leqq 2^m5^n<10^{100}\cdots\cdots\cdots①$$

(i)　$m\geqq n$ のとき

$m=99+k$，$n=99-l$ $(k\geqq 0,\ 0\leqq l\leqq 99)$ とおくと，①より，

$$10^{99}\leqq 2^{99+k}5^{99-l}<10^{100},\ 1\leqq 2^k5^{-l}<10,\ 5^l\leqq 2^k<2\cdot 5^{l+1}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99$ とすると，②から，

$$1\leqq 2^k<2\cdot 5^1,\ 5^1\leqq 2^k<2\cdot 5^2,\ 5^2\leqq 2^k<2\cdot 5^3,\ \cdots,\ 5^{99}\leqq 2^k<2\cdot 5^{100}$$

さらに，これらの不等式を，$10^l\leqq 2^{k+l}<10^{l+1}$ と変形をすると，

$$1\leqq 2^k<10,\ 10\leqq 2^{k+1}<10^2,\ 10^2\leqq 2^{k+2}<10^3,\ \cdots,\ 10^{99}\leqq 2^{k+99}<10^{100}$$

すると，これらの不等式を満たす k の個数の総数は，$2^m<10^{100}$ となる m の個数に一致する。すなわち，(1)より，その個数は 333 である。

よって，②を満たす$(k,\ l)$は，$m=n$ のとき 1 個，$m>n$ のとき 332 個ある。

(ii)　$m\leqq n$ のとき

$m=99-i$，$n=99+j$ $(0\leqq i\leqq 99,\ j\geqq 0)$ とおくと，①より，

$$10^{99}\leqq 2^{99-i}5^{99+j}<10^{100},\ 1\leqq 2^{-i}5^j<10,\ 2^i\leqq 5^j<5\cdot 2^{i+1}\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99$ とすると，③から，

$$1\leqq 5^j<5\cdot 2^1,\ 2^1\leqq 5^j<5\cdot 2^2,\ 2^2\leqq 5^j<5\cdot 2^3,\ \cdots,\ 2^{99}\leqq 5^j<5\cdot 2^{100}$$

さらに，これらの不等式を，$10^i\leqq 5^{j+i}<10^{i+1}$ と変形をすると，

$$1\leqq 5^j<10,\ 10\leqq 5^{j+1}<10^2,\ 10^2\leqq 5^{j+2}<10^3,\ \cdots,\ 10^{99}\leqq 5^{j+99}<10^{100}$$

すると，これらの不等式を満たす j の個数の総数は，$5^n<10^{100}$ となる n の個数に一致する。

ここで，(1)と同様にすると，$n<\dfrac{100}{\log_{10}5}=\dfrac{100}{1-\log_{10}2}$

そして，$143.0<\dfrac{100}{1-\log_{10}2}<143.1$ から $n\leqq 143$ より，n の個数は 144 である。

よって，③を満たす$(i,\ j)$は，$m=n$ のとき 1 個，$m<n$ のとき 143 個ある。

(i)(ii)より，①を満たす$(m,\ n)$の個数は，$1+332+143=476$ である。

© 電送数学舎 2017

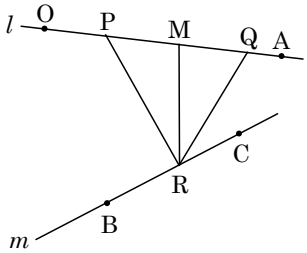
［解 説］

(2)は①を満たす$(m,\ n)$の個数を求めるために，まず各辺に対数をとって格子点の個数と考えたものの，無理そうなので方針を転換しました。次に，すぐわかることですが，$(m,\ n)=(99,\ 99)$は②を満たし，その 99 から m，n の値をともに増やした$(m,\ n)$，ともに減らした$(m,\ n)$は②を満たしません。このことから，(i)として m を増やし n を減らす，(ii)として m を減らし n を増やすと場合分けをしています。そして，解答例のように，不等式②を$10^l \leqq 2^{k+l} < 10^{l+1}$と変形すると，(1)の結論がストレートに利用でき，意外な展開でした。

© 電送数学舎 2017

3

問題のページへ



原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線 l 上に 2 点 P, Q, 点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線 m 上に点 R がある。ここで，線分 PQ の中点を M とするとき，△PQR が正三角形より，その面積は，

$$\triangle \mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{MR}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}^2$$

すると，△PQR の面積が最小となるのは，MR が最小の場合である。すなわち，$\mathrm{MR}\perp l$ かつ $\mathrm{MR}\perp m$ である。

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,\ -4)=-2(1,\ 0,\ 2)$ なので，$t,\ s$ を実数とすると，直線 l, m は，

$$l:(x,\ y,\ z)=t(0,\ -1,\ 1),\ \ m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+s(1,\ 0,\ 2)$$

これより，M$(0,\ -t,\ t)$，R$(s,\ 2,\ 1+2s)$ とおけ，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=(s,\ 2+t,\ 1+2s-t)$

さて，$\mathrm{MR}\perp l$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ となり，

$$-2-t+1+2s-t=0,\ \ -2t+2s=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{MR}\perp m$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり，

$$s+2(1+2s-t)=0,\ \ -2t+5s=-2\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=-1$，$t=-\dfrac{3}{2}$ となり，M$\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$，R$(-1,\ 2,\ -1)$ である。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ から，$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

すると，$\mathrm{PQ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ から，点 P, Q の座標は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)$$

$$=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

よって，P$(0,\ 1,\ -1)$，Q$(0,\ 2,\ -2)$，または P$(0,\ 2,\ -2)$，Q$(0,\ 1,\ -1)$ である。

［解 説］

高校数学に「代数・幾何」という科目があったころの頻出題の 1 つです。ポイントは，正三角形の中線がねじれの位置にある l と m の共通垂線ということです。なお，最後の点 P, Q の座標を求める計算は，単位ベクトルを利用しています。

© 電送数学舎 2017

4

問題のページへ

(1)　$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$ ……①，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$ ……②，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ ……③に対して，p は自然数，また q は 3 以下の自然数から $q=1,\ 2,\ 3$ である。

(i)　$q=1$ のとき

②より，$\tan\beta=1$ から，n を整数として，$\beta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ となり，①より，

$$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p$$

すると，③より $p=-2$ となり，不適である。

(ii)　$q=2$ のとき

②より，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$ となり，$\tan 2\beta=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$ である。すると，①③より，

$$\frac{1}{p}+\frac{4}{3}=2\left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{4}{3}\right),\ \frac{11}{3p}=\frac{2}{3}$$

よって，$p=\dfrac{11}{2}$ となり，不適である。

(iii)　$q=3$ のとき

②より，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ となり，$\tan 2\beta=\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{3}{4}$ である。すると，①③より，

$$\frac{1}{p}+\frac{3}{4}=2\left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{3}{4}\right),\ \frac{5}{2p}=\frac{5}{4}$$

よって，$p=2$ となり，適する。

(i)～(iii)より，$(p,\ q)=(2,\ 3)$ である。

(2)　q が $q>3$ の自然数のとき，②から，$\tan 2\beta=\dfrac{2\cdot\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q^2}}=\dfrac{2q}{q^2-1}$ となり，①③より，

$$\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}=2\left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q}{q^2-1}\right),\ 2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$$

$q>3$ のとき $q^2-q-1=q(q-1)-1>0$ から，$p=\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}$ ……④

ここで，p は自然数より，④から $\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\geqq 1$ となり，

$$q^2+4q-1\geqq 2(q^2-q-1),\ q^2-6q-1\leqq 0$$

これより，$3-\sqrt{10}\leqq q\leqq 3+\sqrt{10}$ となり，$3<\sqrt{10}<4$ から $q\geqq 7$ のときは p は自然数ではなく不適である。そこで，以下，$q=4,\ 5,\ 6$ の場合について調べる。

© 電送数学舎 2017

(iv)　$q=4$ のとき　④より，$p=\dfrac{16+16-1}{2(16-4-1)}=\dfrac{31}{22}$ となり不適である。

(v)　$q=5$ のとき　④より，$p=\dfrac{25+20-1}{2(25-5-1)}=\dfrac{22}{19}$ となり不適である。

(vi)　$q=6$ のとき　④より，$p=\dfrac{36+24-1}{2(36-6-1)}=\dfrac{59}{58}$ となり不適である。

(iv)～(vi)より，条件(A)を満たす $(p,\ q)$ で，$q>3$ であるものは存在しない。

［解 説］

誘導にしたがって解答例を作りましたので，やや冗長な感じがします。まず，(2)で一般的な関係式を導いた後，(1)の数値をあてはめても構いません。

© 電送数学舎 2017

5

問題のページへ

(1)　さいころを n 回振り，出た目の最大値を M，最小値を L としたとき，$M-L=1$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 6)$ の場合である。

まず，$(L,\ M)=(1,\ 2)$ のときは，出た目がすべて 1 または 2 のいずれかという事象から，1 だけおよび 2 だけという事象を除いたものより，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

また，他の場合も同様なので，$M-L=1$ である確率は，

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)　$M-L=5$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 6)$ の場合だけである。

そこで，出た目がすべて 1 以上 5 以下の事象を A，2 以上 6 以下の事象を B とすると，$M-L=5$ である確率は，

$$\begin{aligned}1-P(A\cup B)&=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

［解 説］

余事象の考え方がポイントである確率の有名問題です。頭を整理するには，図を書くと効果的です。

© 電送数学舎 2017