$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

w を 0 でない複素数, x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

四面体 OABC を考える。点 D, E, F, G, H, I は，それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり，頂点ではないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$ であることを示せ。

(2)　D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

p，q を自然数，α，β を，$\tan\alpha = \dfrac{1}{p}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

△ABC は鋭角三角形であり，$\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また△ABC の外接円の半径は 1 であるとする。

(1)　△ABC の内心を P とするとき，∠BPC を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

$a \geqq 0$ とする。$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$，直線 $y = ax$，直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。

（ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。）

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

n を自然数とする。n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ ……①に対し，$|w|=R\ (R>1)$ のとき，θ を任意の実数として，

$$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x+yi=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ となり，

$$x+yi=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より $\cos\theta=\dfrac{R}{R^2+1}x$，④より $\sin\theta=\dfrac{R}{R^2-1}y$ なので，

$$\left(\frac{R}{R^2+1}\right)^2x^2+\left(\frac{R}{R^2-1}\right)^2y^2=1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，⑤で表される楕円である。

(2)　$\arg w=\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，r を正の実数として，

$$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

(1)と同様にすると，①⑥より，$x+yi=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha$ となり，

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦より $r+\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{\cos\alpha}$，⑧より $r-\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$ となり，

$$2r=\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑨,\quad \frac{2}{r}=\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

すると，⑨⑩より，

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)=4,\quad \frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，$r>0$ から，$r+\dfrac{1}{r}\geqq 2\sqrt{r\cdot\dfrac{1}{r}}=2$，また $r-\dfrac{1}{r}$ は任意の値をとる。

すると，$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$ で，⑦から $x\geqq 2\cos\alpha$，⑧から y は任意の値をとる。

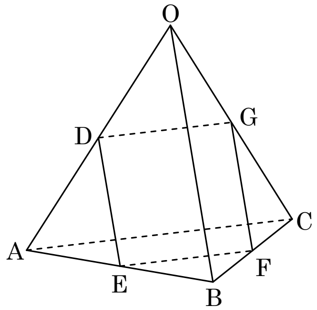
以上より，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，⑪で表される双曲線である。ただし，$x\geqq 2\cos\alpha$ の部分である。

［解　説］

複素数と軌跡に関する標準的な問題です。なお，(2)では x に限界があり，軌跡は双曲線の右の枝になります。

2

問題のページへ



(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。また, D, E, F, G について，$\mathrm{OD}:\mathrm{DA}=d:1-d$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EA}=e:1-e$，$\mathrm{BF}:\mathrm{FC}=f:1-f$，$\mathrm{OG}:\mathrm{GC}=g:1-g$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=g\vec{c}-d\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(1-f)\vec{b}+f\vec{c}-(1-e)\vec{b}-e\vec{a}$$

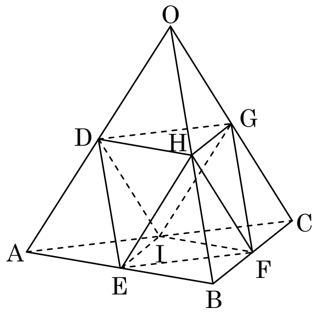
$$=f\vec{c}+(e-f)\vec{b}-e\vec{a}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$　(k は定数)

$$f\vec{c}+(e-f)\vec{b}-e\vec{a}=k(g\vec{c}-d\vec{a})\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，$e-f=0$ すなわち $e=f$ となり，

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$$



(2)　まず, D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているので, 四角形 DEFG は正方形である。

すると，①で $k=1$ となり，$f=g$，$e=f$，$e=d$ から，

$$d=e=f=g\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\mathrm{OH}:\mathrm{HB}=h:1-h$，$\mathrm{AI}:\mathrm{IC}=i:1-i$ とおくと，四角形 DIFH は正方形なので，$\overrightarrow{\mathrm{IF}}=\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ より，

$$(1-f)\vec{b}+f\vec{c}-(1-i)\vec{a}-i\vec{c}=h\vec{b}-d\vec{a}$$

同様にすると，$1-i=d$，$1-f=h$，$f-i=0$ となり，

$$d=1-f=1-i=h\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$d=e=f=g=h=i=\dfrac{1}{2}$ となるので, 点 D, E, F, G, H, I は四面体 OABC の各辺の中点である。

さらに，△DHG が正三角形より△ABC が正三角形となり，同様に△OAB, △OBC，△OCA も正三角形となるので, 四面体 OABC は正四面体である。

［解　説］

ベクトルの空間図形への応用ですが, (1)が(2)の論証への誘導になっています。

$\boxed{3}$ 　　問題のページへ

自然数 p, q に対して，条件より，

$$\tan\alpha=\frac{1}{p}\cdots\cdots\cdots①,\ \tan\beta=\frac{1}{q}\cdots\cdots\cdots②,\ \tan(\alpha+2\beta)=2\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$q=1$ のとき

②より，$\tan\beta=1$ から，n を整数として，$\beta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ となり，①より，

$$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p$$

すると，③より $p=-2$ となり，不適である。

(ii)　$q\geqq 2$ のとき

②から，$\tan 2\beta=\dfrac{2\cdot\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q^2}}=\dfrac{2q}{q^2-1}$ となり，①③より，

$$\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}=2\left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q}{q^2-1}\right),\ 2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$$

$q\geqq 2$ のとき $q^2-q-1=q(q-1)-1>0$ から，$p=\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\cdots\cdots\cdots④$

ここで，p は自然数より，④から $\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\geqq 1$ となり，

$$q^2+4q-1\geqq 2(q^2-q-1),\ q^2-6q-1\leqq 0$$

これより，$3-\sqrt{10}\leqq q\leqq 3+\sqrt{10}$ となり，$3<\sqrt{10}<4$ から $q\geqq 7$ のときは自然数 p は存在しない。そこで，以下，$q=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の場合について調べる。

(a)　$q=2$ のとき　④より，$p=\dfrac{4+8-1}{2(4-2-1)}=\dfrac{11}{2}$ となり不適である。

(b)　$q=3$ のとき　④より，$p=\dfrac{9+12-1}{2(9-3-1)}=2$ となり適する。

(c)　$q=4$ のとき　④より，$p=\dfrac{16+16-1}{2(16-4-1)}=\dfrac{31}{22}$ となり不適である。

(d)　$q=5$ のとき　④より，$p=\dfrac{25+20-1}{2(25-5-1)}=\dfrac{22}{19}$ となり不適である。

(e)　$q=6$ のとき　④より，$p=\dfrac{36+24-1}{2(36-6-1)}=\dfrac{59}{58}$ となり不適である。

(a)～(e)より，条件を満たす p, q の組は，$(p,\ q)=(2,\ 3)$ だけである。

［解　説］

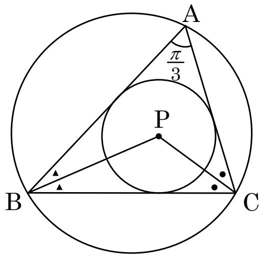
誘導をつけた同じ内容の問題が文系で出されています。なお，$q=1$ のときは，$\tan 2\beta$ が定義できないので別扱いです。

4

問題のページへ

(1)　△ABC の内心を P とするとき,

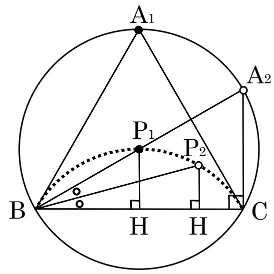
$$\angle \mathrm{BPC} = \pi - (\angle \mathrm{PBC} + \angle \mathrm{PCB})$$
$$= \pi - \frac{1}{2}(\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB}) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \angle \mathrm{A})$$
$$= \pi - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$$



(2)　△ABC の外接円の半径は 1 から，正弦定理より，

$$\mathrm{BC} = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

さて，△ABC は$\angle \mathrm{A} = \frac{\pi}{3}$である鋭角三角形である。ここで，$\triangle \mathrm{A_1BC}$を正三角形，$\triangle \mathrm{A_2BC}$を$\angle \mathrm{C} = \frac{\pi}{2}$の直角三角形としたとき，対称性から一般性を失うことなく，点 A は右図の弧$\mathrm{A_1A_2}$上を動くとしてもよい。ただし，点$\mathrm{A_1}$は含み，点$\mathrm{A_2}$は含まない。



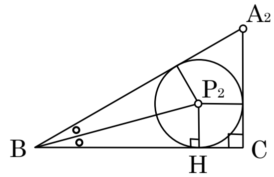
また，点 P は$\angle \mathrm{BPC} = \frac{2}{3}\pi$から BC を弦とする点線の円弧上を動く。そして，$\mathrm{A} = \mathrm{A_1}$のとき$\mathrm{P} = \mathrm{P_1}$，$\mathrm{A} = \mathrm{A_2}$のとき$\mathrm{P} = \mathrm{P_2}$とする。さらに，$\mathrm{P_1}$から BC に垂線$\mathrm{P_1H_1}$，$\mathrm{P_2}$から BC に垂線$\mathrm{P_2H_2}$を引く。

すると，△ABC の内接円の半径rのとりうる値は，$\mathrm{P_2H_2} < r \leqq \mathrm{P_1H_1}$である。

そこで，$\angle \mathrm{P_1BH_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$から，$\mathrm{P_1H_1} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

また，$\triangle \mathrm{A_2BC}$は，$\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AC} = 1$，$\mathrm{BC} = \sqrt{3}$なので，右図から，

$$(\sqrt{3} - \mathrm{P_2H_2}) + (1 - \mathrm{P_2H_2}) = 2,\quad \mathrm{P_2H_2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$



以上より，$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < r \leqq \frac{1}{2}$である。

［解　説］

平面図形の計量についての基本的な問題です。(1)の誘導により，内心の軌跡が導けます。

5

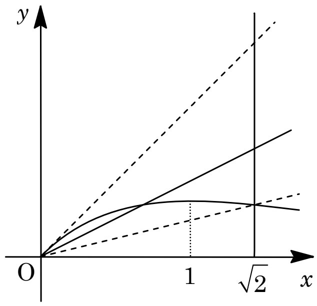
問題のページへ

$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ において，曲線 $y = xe^{-x}$ に対し，

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

すると，y の増減は右表のようになり，直線 $y = ax$ ($a \geqq 0$)，直線 $x = \sqrt{2}$ と合わせて図示すると，右図のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'	1	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$



ここで，直線 $y = ax$ が点 $(\sqrt{2},\ \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$ を通るとき，

$a = \dfrac{\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}}$ となり，原点における接線のとき，

$x = 0$ で $y' = 1$ から $a = 1$ である。

さて，曲線 $y = xe^{-x}$，直線 $y = ax$，直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積 $S(a)$ は,

(i)　$0 \leqq a \leqq e^{-\sqrt{2}}$ のとき　$S(a)$ は単調に減少する。

(ii)　$e^{-\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ のとき

$y = xe^{-x}$ と $y = ax$ を連立すると，$xe^{-x} = ax$ から，$x = 0,\ -\log a$ となるので,

$$S(a) = \int_0^{-\log a}(xe^{-x} - ax)\,dx + \int_{-\log a}^{\sqrt{2}}(ax - xe^{-x})\,dx$$

ここで，$F(x) = \displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + C$ とおくと,

$$S(a) = F(-\log a) - F(0) - F(\sqrt{2}) + F(-\log a) + \frac{a}{2}\cdot 2 - \frac{a}{2}(\log a)^2\cdot 2$$
$$= 2F(-\log a) - F(0) - F(\sqrt{2}) + a - a(\log a)^2$$
$$= -2a(-\log a + 1) + 1 + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + a - a(\log a)^2$$
$$= a\{-(\log a)^2 + 2\log a - 1\} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$$
$$S'(a) = -(\log a)^2 + 2\log a - 1 + a\left(-2\log a\cdot\frac{1}{a} + \frac{2}{a}\right) = -(\log a)^2 + 1$$

$S'(a) = 0$ とすると，$\log a = \pm 1$ から $a = e^{\pm 1}$ となるので，$e^{-\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ のとき $S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	$e^{-\sqrt{2}}$	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(iii)　$a \geqq 1$ のとき　$S(a)$ は単調に増加する。

すると，$S(a)$ は $a = e^{-\sqrt{2}}$，1 で連続なので，(i)～(iii)の結果から，$a = e^{-1}$ のときに最小となり，最小値は,

$$S(e^{-1}) = e^{-1}(-1-2-1) + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1 = 1 - 4e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。計算ミスに要注意です。

6

問題のページへ

数字 1 から 5 を並べてできる n 桁の数 X が 3 で割り切れる確率を p_n, 3 で割って 1 余る確率を q_n, 3 で割って 2 余る確率を r_n とする。

さて, n 桁の数 X に 1 枚のカード加えて $n+1$ 桁の数を作るとき，この $n+1$ 桁の数が 3 で割り切れるのは,

(i)　X が 3 で割り切れるとき　数字 3 のカードを加える。

(ii)　X が 3 で割って 1 余るとき　数字 2 または 5 のカードを加える。

(iii)　X が 3 で割って 2 余るとき　数字 1 または 4 のカードを加える。

すると，$p_1=\dfrac{1}{5}$，$q_1=r_1=\dfrac{2}{5}$ のもとで,

$$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}q_n+\frac{2}{5}r_n=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}(1-p_n)=-\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}$$

変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{5}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$ となり,

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=-\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n+\dfrac{1}{3}$ である。

［解　説］

確率と漸化式についての基本的な問題です。立式も，さほど難しくはありません。