

1

解答解説のページへ

a は正の実数とし、座標平面内の点 (x_0, y_0) は 2 つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり、 $|x_0| \neq 1$ を満たすとする。 C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつとき、 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ において、辺 BC 上に B とは異なる点 P をとり、線分 AP の垂直二等分線が辺 AB 、辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q 、 R とする。

- (1) 線分 QR の長さを $\sin \angle BAP$ を用いて表せ。
- (2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ。

3

[解答解説のページへ](#)

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

四面体 $ABCD$ は $AC = BD$, $AD = BC$ を満たすとし, 辺 AB の中点を P , 辺 CD の中点を Q とする。

- (1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。
- (2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 $ABCD$ を切って 2 つの部分に分ける。このとき, 2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

5

解答解説のページへ

整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して、次の一連の操作を考える。ただし、各球に書かれている整数は1つのみとする。

- (i) 袋から無作為に球を1個取り出し、その球に書かれている整数を k とする。
- (ii) $k \neq 0$ の場合、整数 k が書かれた球を1個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。
- (iii) $k = 0$ の場合、袋の中にあつた球に書かれていた数の最大値より1大きい整数が書かれた球を1個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。

整数0が書かれている球が1個入っており他の球が入っていない袋を用意する。この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に、袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする。例えば X_1 はつねに1である。以下 $n \geq 2$ として次の問いに答えよ。

- (1) $X_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ。
- (2) $X_n \leq n+1$ である確率を求めよ。

1

問題のページへ

まず, $C_1: y = |x^2 - 1| \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して,

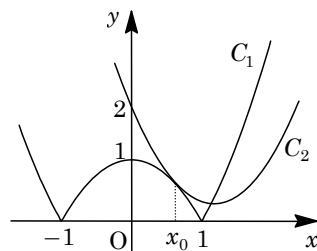
$$y = x^2 - 1 \quad (|x| \geq 1), \quad y' = 2x \quad (|x| > 1)$$

$$y = -x^2 + 1 \quad (|x| \leq 1), \quad y' = -2x \quad (|x| < 1)$$

また, $C_2: y = x^2 - 2ax + 2 \quad (a > 0) \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して,

$$y = (x - a)^2 - a^2 + 2, \quad y' = 2x - 2a$$

ここで, C_1 と C_2 が共有点 (x_0, y_0) ($|x_0| \neq 1$) で共通の



接線をもつ条件は,

(i) $|x_0| > 1$ のとき

$$x_0^2 - 1 = x_0^2 - 2ax_0 + 2, \quad 2x_0 = 2x_0 - 2a$$

$a > 0$ より $2x_0 = 2x_0 - 2a$ は成立しない。

(ii) $|x_0| < 1$ のとき

$$-x_0^2 + 1 = x_0^2 - 2ax_0 + 2, \quad -2x_0 = 2x_0 - 2a$$

すると, $x_0 = \frac{a}{2}$ となり, $-\frac{a^2}{4} + 1 = \frac{a^2}{4} - 2a \cdot \frac{a}{2} + 2$ から, $-\frac{a^2}{2} + 1 = 0$

よって, $a > 0$ より $a = \sqrt{2}$ となり, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である ($|x_0| < 1$ を満たす)。

(i)(ii) より, $C_2: y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \cdots \cdots \textcircled{2}'$ となる。

さて, C_1 と C_2 の (x_0, y_0) 以外の共有点について, $|x| \geq 1$ で $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}'$ を連立すると,

$$x^2 - 1 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2, \quad 2\sqrt{2}x = 3$$

よって, $x = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ となり, C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}} (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) dx - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (-x^2 + 1) dx - \int_1^{\frac{3}{4}\sqrt{2}} (x^2 - 1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \sqrt{2}x^2 + 2x \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{\frac{3}{4}\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{32} \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \left(-\frac{2}{3} \right) - \left(-\frac{5}{12} \sqrt{2} \right) - \left(-\frac{15}{32} \sqrt{2} \right) + \left(-\frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{23}{24} \sqrt{2} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

[解説]

微積分の総合問題です。基本的な内容ですが、最後の数値計算はやや複雑です。

2

問題のページへ

(1) 右図のように座標系を設定し、 $0 < t \leq 1$ として $P(1, t)$

とおく。すると、線分 AP の垂直二等分線は、

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + t\left(y - \frac{t}{2}\right) = 0$$

x 軸との交点は、 $\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{t^2}{2} = 0$ から $x = \frac{t^2 + 1}{2}$

y 軸との交点は、 $-\frac{1}{2} + t\left(y - \frac{t}{2}\right) = 0$ から $y = \frac{t^2 + 1}{2t}$

これより、 $Q\left(\frac{t^2 + 1}{2}, 0\right)$ 、 $R\left(0, \frac{t^2 + 1}{2t}\right)$ となり、

$$QR^2 = \left(\frac{t^2 + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t^2 + 1}{2t}\right)^2 = \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^2}(t^2 + 1) = \frac{(t^2 + 1)^3}{4t^2}$$

さて、 $\angle BAP = \theta$ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$) とおくと、 $t = \tan \theta$ となり、

$$QR^2 = \frac{(\tan^2 \theta + 1)^3}{4 \tan^2 \theta} = \frac{1}{4 \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^6 \theta} = \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^4 \theta}$$

$$QR = \frac{1}{2 \sin \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta)} = \frac{1}{2 \sin \angle BAP (1 - \sin^2 \angle BAP)}$$

(2) $f(s) = s(1 - s^2) = s - s^3$ ($0 < s \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$) とおくと、 $QR = \frac{1}{2f(s)}$ となり、

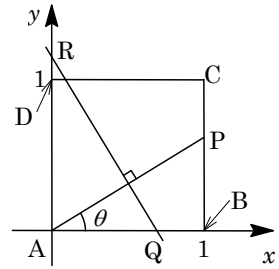
$$f'(s) = 1 - 3s^2$$

これより、 $f(s)$ の増減は右表のようになり、 $f(s)$ は $s = \frac{\sqrt{3}}{3}$ で最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。したがって、 QR の長さの最小値は、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ である。

s	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(s)$		+	0	-	
$f(s)$	0	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

[解説]

微分と増減についての基本題です。誘導に従えばスムーズに結論まで到達します。なお、(1)は相似を利用する方法もあります。



3

問題のページへ

以下, $\text{mod}3$ で記すと, $9 \equiv 0$ に注意して,

$$(i) \quad n \equiv 0 \text{ のとき} \quad n^3 - 7n + 9 \equiv 0 - 0 + 0 = 0$$

$$(ii) \quad n \equiv 1 \text{ のとき} \quad n^3 - 7n + 9 \equiv 1 - 7 + 0 = -6 \equiv 0$$

$$(iii) \quad n \equiv 2 \text{ のとき} \quad n^3 - 7n + 9 \equiv 8 - 14 + 0 = -6 \equiv 0$$

(i)~(iii)より, $n^3 - 7n + 9$ はつねに 3 の倍数である。

すると, $n^3 - 7n + 9$ が素数となるのは, $n^3 - 7n + 9 = 3$ の場合だけであり,

$$n^3 - 7n + 6 = 0, \quad (n-1)(n-2)(n+3) = 0$$

以上より, 求める整数 n は, $n = 1, 2, -3$ である。

[解説]

まず, $n^3 - 7n + 9$ の因数分解を考えたところうまくいかなかったため, 次の手は, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ として実験です。すると, すべて 3 の倍数になることがわかり……。

4

問題のページへ

- (1)
- $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$
- ,
- $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$
- ,
- $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$
- とおく。

まず, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ より, $|\vec{c}| = |\vec{d} - \vec{b}|$ となり,

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{b}|^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ より, $|\vec{d}| = |\vec{c} - \vec{b}|$ となり,

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- ①②より,
- $|\vec{c}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{b}|^2$
- となり,

$$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて, 点 P, 点 Q は, それぞれ辺 AB, 辺 CD の中点なので,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

ここで, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(-|\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d})$ すると, ③から $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ となるので, $PQ \perp AB$ である。

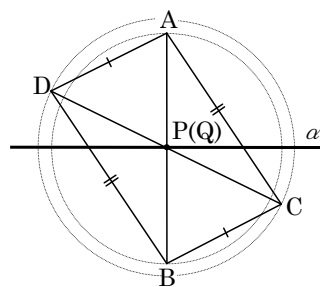
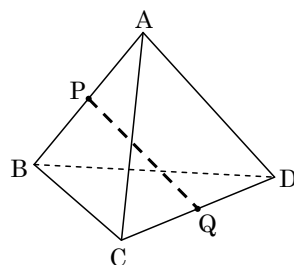
- (2) ①③より,
- $|\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$
- となり,

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot (-\vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} - |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2)$ すると, ④から $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ となるので, $PQ \perp CD$ である。

これより, 線分 PQ を軸として四面体 ABCD を 180° 回転すると, 頂点 A は B, 頂点 B は A, 頂点 C は D, 頂点 D は A に一致する。すなわち, 四面体 ABCD は線分 PQ を軸とした回転対称になっている。

よって, 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を 2 つの部分に分けたとき, 線分 PQ を軸として, その一方を 180° 回転すると, もう一方に重なる。言い換えると, α によって分けられた 2 つの部分の体積は等しい。



[解説]

立体の性質に関する問題です。(1)はオーソドックスにベクトルを利用した解で記しました。(2)では, (1)と同様に考えると, $PQ \perp CD$ になることが推測できます。それを示した後, 半直線 QP 上に視点をもつてくると上図のようになり, 回転対称という構図が見えてきます。

5

問題のページへ

(1) 与えられた一連の操作を繰り返し n 回行った後に、袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする。

(i) X_n の値が最も大きくなるとき

整数 0 が書かれている球を n 回取り出した場合で、このとき、

$$X_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

その確率は、 $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$ である。

(ii) X_n の値が 2 番目に大きくなるとき

整数 0 が書かれている球を $n-1$ 回取り出し、 n 回目に整数 $n-1$ が書かれている球を取り出した場合で、このとき、

$$X_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + (n-1) = \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = \frac{1}{2}(n+2)(n-1)$$

その確率は、 $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$ である。

(i)(ii)より、 $X_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率は、 $\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{2}{n!}$ である。

(2) (iii) X_n の値が最も小さくなるとき

2 回目以降、整数 1 が書かれている球を $n-1$ 回取り出した場合で、このとき、

$$X_n = 0 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n$$

その確率は、 $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ である。

(iv) X_n の値が 2 番目に小さくなるとき

2 回目以降、整数 0 が書かれている球を l 回目 ($2 \leq l \leq n$) に 1 回だけ取り出し、残り $n-2$ 回 ($n \geq 3$) は整数 1 が書かれている球を取り出した場合で、このとき、

$$X_n = 0 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 2 = n+1$$

そして、各 l の値に対して、それぞれの確率は、

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{l-2}{l-1} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{l-1}{l+1} \cdots \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} = \frac{1}{(n-1)n}$$

(iii)(iv)より、 $X_n \leq n+1$ である確率は、 $\frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)n} \cdot (n-1) = \frac{2}{n}$ である。

なお、 $n=2$ のとき、この確率は 1 となり、成立している。

[解説]

読解力が要求される確率の問題です。 X_n の値について、(1)は大きい方から 2 番目まで、(2)は小さい方から 2 番目までということですが、もう少し丁寧に記述した方がよかったかもしれません。