1

解答解説のページへ

a は正の実数とし，座標平面内の点 $(x_0,\ y_0)$ は 2 つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|,\quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり，$|x_0| \neq 1$ を満たすとする。C_1 と C_2 が $(x_0,\ y_0)$ で共通の接線をもつとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P をとり，線分 AP の垂直二等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とする。

(1) 線分 QR の長さを $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を用いて表せ。

(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

四面体 ABCD は $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える。ただし，各球に書かれている整数は1つのみとする。

(i)　袋から無作為に球を1個取り出し，その球に書かれている整数を k とする。

(ii)　$k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す。

(iii)　$k = 0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す。

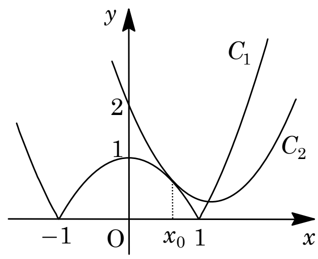
整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する。この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする。例えば X_1 はつねに 1 である。以下 $n \geqq 2$ として次の問いに答えよ。

(1)　$X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ。

(2)　$X_n \leqq n+1$ である確率を求めよ。

1

問題のページへ



まず，$C_1 : y=\left|x^2-1\right|$……①に対して，

$$y=x^2-1\ (|x|\geqq 1),\quad y'=2x\ (|x|>1)$$

$$y=-x^2+1\ (|x|\leqq 1),\quad y'=-2x\ (|x|<1)$$

また，$C_2 : y=x^2-2ax+2\quad (a>0)$……②に対して，

$$y=(x-a)^2-a^2+2,\quad y'=2x-2a$$

ここで，C_1 と C_2 が共有点 $(x_0,\ y_0)$ $(|x_0|\neq 1)$ で共通の接線をもつ条件は，

(i)　$|x_0|>1$ のとき

$$x_0{}^2-1=x_0{}^2-2ax_0+2,\quad 2x_0=2x_0-2a$$

$a>0$ より $2x_0=2x_0-2a$ は成立しない。

(ii)　$|x_0|<1$ のとき

$$-x_0{}^2+1=x_0{}^2-2ax_0+2,\quad -2x_0=2x_0-2a$$

すると，$x_0=\dfrac{a}{2}$ となり，$-\dfrac{a^2}{4}+1=\dfrac{a^2}{4}-2a\cdot\dfrac{a}{2}+2$ から，$-\dfrac{a^2}{2}+1=0$

よって，$a>0$ より $a=\sqrt{2}$ となり，$x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である（$|x_0|<1$ を満たす)。

(i)(ii)より，$C_2 : y=x^2-2\sqrt{2}x+2$ …… ②$'$ となる。

さて，C_1 と C_2 の $(x_0,\ y_0)$ 以外の共有点について，$|x|\geqq 1$ で①②$'$を連立すると，

$$x^2-1=x^2-2\sqrt{2}x+2,\quad 2\sqrt{2}x=3$$

よって，$x=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ となり，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}}(x^2-2\sqrt{2}x+2)\,dx-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}(-x^2+1)\,dx-\int_{1}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$=\Big[\frac{x^3}{3}-\sqrt{2}x^2+2x\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}}+\Big[\frac{x^3}{3}-x\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}-\Big[\frac{x^3}{3}-x\Big]_{1}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{19}{32}\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{5}{8}+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}+\Big(-\frac{2}{3}\Big)-\Big(-\frac{5}{12}\sqrt{2}\Big)-\Big(-\frac{15}{32}\sqrt{2}\Big)+\Big(-\frac{2}{3}\Big)$$

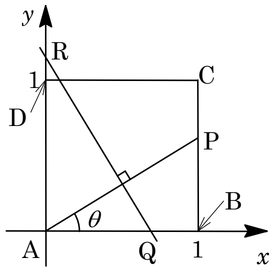
$$=\frac{23}{24}\sqrt{2}-\frac{4}{3}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。基本的な内容ですが，最後の数値計算はやや複雑です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　右図のように座標系を設定し，$0<t\leqq 1$ として $\mathrm{P}(1,\ t)$ とおく。すると，線分 AP の垂直二等分線は,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+t\left(y-\frac{t}{2}\right)=0$$

x 軸との交点は，$\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{t^2}{2}=0$ から $x=\frac{t^2+1}{2}$

y 軸との交点は，$-\frac{1}{2}+t\left(y-\frac{t}{2}\right)=0$ から $y=\frac{t^2+1}{2t}$

これより，$\mathrm{Q}\left(\frac{t^2+1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{R}\left(0,\ \frac{t^2+1}{2t}\right)$ となり，

$$\mathrm{QR}^2=\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2=\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}(t^2+1)=\frac{(t^2+1)^3}{4t^2}$$

さて，$\angle\mathrm{BAP}=\theta\left(0<\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$t=\tan\theta$ となり，

$$\mathrm{QR}^2=\frac{(\tan^2\theta+1)^3}{4\tan^2\theta}=\frac{1}{4\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^6\theta}=\frac{1}{4\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^4\theta}$$

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{2\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}=\frac{1}{2\sin\angle\mathrm{BAP}\,(1-\sin^2\angle\mathrm{BAP})}$$

(2)　$f(s)=s(1-s^2)=s-s^3\left(0<s\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とおくと，$\mathrm{QR}=\frac{1}{2f(s)}$ となり，

$$f'(s)=1-3s^2$$

これより，$f(s)$ の増減は右表のようになり，$f(s)$ は $s=\frac{\sqrt{3}}{3}$ で最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。したがって，QR の長さの最小値は，$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ である。

s	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(s)$		$+$	0	$-$	
$f(s)$	0	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

［解 説］

微分と増減についての基本題です。誘導に従えばスムーズに結論まで到達します。なお, (1)は相似を利用する方法もあります。

3

問題のページへ

以下，mod3 で記すと，$9\equiv 0$ に注意して，

(i)　$n\equiv 0$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 0-0+0=0$

(ii)　$n\equiv 1$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 1-7+0=-6\equiv 0$

(iii)　$n\equiv 2$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 8-14+0=-6\equiv 0$

(i)～(iii)より，n^3-7n+9 はつねに 3 の倍数である。

すると，n^3-7n+9 が素数となるのは，$n^3-7n+9=3$ の場合だけであり，

$$n^3-7n+6=0\,,\ (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

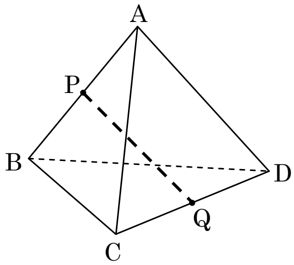
以上より，求める整数 n は，$n=1,\ 2,\ -3$ である。

［解 説］

まず，n^3-7n+9 の因数分解を考えたところうまくいかなかったため，次の手は，$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$ として実験です。すると，すべて 3 の倍数になることがわかり……。

4

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおく。

まず，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$ より，$|\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{b}|$ となり，

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$ より，$|\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{b}|$ となり，

$$|\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2$ となり，

$$|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$

さて，点 P，点 Q は，それぞれ辺 AB，辺 CD の中点なので，

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

ここで，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d})$

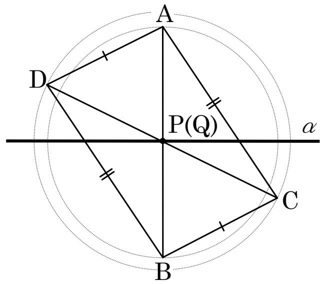
すると，③から $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ となるので，$PQ\perp AB$ である。

(2)　①③より，$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$ となり，

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(-\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2)$

すると，④から $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ となるので，$PQ\perp CD$ である。



これより，線分 PQ を軸として四面体 ABCD を180°回転すると，頂点 A は B，頂点 B は A，頂点 C は D，頂点 D は C に一致する。すなわち，四面体 ABCD は線分 PQ を軸とした回転対称になっている。

よって，線分 PQ を含む平面αで四面体 ABCD を 2 つの部分に分けたとき，線分 PQ を軸として，その一方を180°回転すると，もう一方に重なる。言い換えると，αによって分けられた 2 つの部分の体積は等しい。

［解 説］

立体の性質に関する問題です。(1)はオーソドックスにベクトルを利用した解で記しました。(2)では，(1)と同様に考えると，$PQ\perp CD$ になることが推測できます。それを示した後，半直線 QP 上に視点をもってくると上図のようになり，回転対称という構図が見えてきます。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1)　与えられた一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする。

(i)　X_n の値が最も大きくなるとき

整数 0 が書かれている球を n 回取り出した場合で，このとき，

$$X_n=0+1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

その確率は，$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$ である。

(ii)　X_n の値が 2 番目に大きくなるとき

整数 0 が書かれている球を $n-1$ 回取り出し，n 回目に整数 $n-1$ が書かれている球を取り出した場合で，このとき，

$$X_n=0+1+2+3+\cdots+(n-1)+(n-1)=\frac{1}{2}n(n+1)-1=\frac{1}{2}(n+2)(n-1)$$

その確率は，$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$ である。

(i)(ii)より，$X_n\geqq\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率は，$\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}=\frac{2}{n!}$ である。

(2)　(iii)　X_n の値が最も小さくなるとき

2 回目以降，整数 1 が書かれている球を $n-1$ 回取り出した場合で，このとき，

$$X_n=0+1+1+1+\cdots+1+1=n$$

その確率は，$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$ である。

(iv)　X_n の値が 2 番目に小さくなるとき

2 回目以降，整数 0 が書かれている球を l 回目 $(2\leqq l\leqq n)$ に 1 回だけ取り出し，残り $n-2$ 回 $(n\geqq 3)$ は整数 1 が書かれている球を取り出した場合で，このとき，

$$X_n=0+1+1+1+\cdots+1+2=n+1$$

そして，各 l の値に対して，それぞれの確率は，

$$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{l-2}{l-1}\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{l-1}{l+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n}=\frac{1}{(n-1)n}$$

(iii)(iv)より，$X_n\leqq n+1$ である確率は，$\frac{1}{n}+\frac{1}{(n-1)n}\cdot(n-1)=\frac{2}{n}$ である。

なお，$n=2$ のとき，この確率は 1 となり，成立している。

［解　説］

読解力が要求される確率の問題です。X_n の値について，(1)は大きい方から 2 番目まで，(2)は小さい方から 2 番目までということですが，もう少し丁寧に記述した方がよかったかもしれません。