1

解答解説のページへ

0 でない実数 a, b, c は次の条件(i)と(ii)を満たしながら動くものとする。

(i)　$1+c^2 \leqq 2a$

(ii)　2 つの放物線 $C_1 : y = ax^2$ と $C_2 : y = b(x-1)^2 + c$ は接している。

ただし，2 つの曲線が接するとは，ある共有点において共通の接線をもつことであり，その共有点を接点という。

(1)　C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ。

(2)　C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め，その範囲を図示せよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i)　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii)　$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{DAB} = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積 $k = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ が最大となるものについて，k の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

コインを n 回投げて複素数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n を次のように定める。

(i)　1 回目に表が出れば $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とし，裏が出れば $z_1 = 1$ とする。

(ii)　$k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ のとき，k 回目に表が出れば $z_k = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k = \overline{z_{k-1}}$ とする。ただし，$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である。

このとき，$z_n = 1$ となる確率を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

曲線 $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における法線上に，点 B を $\mathrm{AB}=1$ となるようにとる。ただし B の x 座標は t より大きいものとする。

(1) 点 B の座標 $(u(t),\ v(t))$ を求めよ。また $\left(\dfrac{du}{dt},\ \dfrac{dv}{dt}\right)$ を求めよ。

(2) 実数 r は $0<r<1$ を満たすとし，t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r)$，$L_2(r)$ とする。このとき，極限 $\displaystyle\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))$ を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

四面体 ABCD は $AC = BD$，$AD = BC$ を満たすとし, 辺 AB の中点を P, 辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき, 2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$C_1 : y = ax^2$ ……①，$C_2 : y = b(x-1)^2 + c$ ……②の接点の座標を$(t,\ at^2)$とおく。

$$at^2 = b(t-1)^2 + c \text{ ………③}$$

①より $y' = 2ax$，②より $y' = 2b(x-1)$ なので，

$$2at = 2b(t-1) \text{ ………④}$$

④を③に代入すると，$at^2 = at(t-1) + c$ となり，$at = c$

$a \neq 0$ から $t = \dfrac{c}{a}$，そして $at^2 = \dfrac{c^2}{a}$ となり，接点の座標は$\left(\dfrac{c}{a},\ \dfrac{c^2}{a}\right)$である。

(2)　接点を$(x,\ y)$とおくと，$x = \dfrac{c}{a}$ ……⑤，$y = \dfrac{c^2}{a} = cx$ ……⑥

⑤より $c \neq 0$ から $x \neq 0$ となり，⑥から $c = \dfrac{y}{x}$ ………⑦

⑤から $a = \dfrac{c}{x}$ となり，⑦を代入して $a = \dfrac{y}{x^2}$ ………⑧

条件から $1 + c^2 \leqq 2a$ なので，⑦⑧を代入すると，$1 + \dfrac{y^2}{x^2} \leqq \dfrac{2y}{x^2}$ から，

$$x^2 + y^2 \leqq 2y,\quad x^2 + (y-1)^2 \leqq 1$$

さらに，$a \neq 0$，$c \neq 0$ から，$y \neq 0$ である。

また，④から $ax = b(x-1)$ となり，$a \neq 0$，$x \neq 0$ より $x \neq 1$ となり，

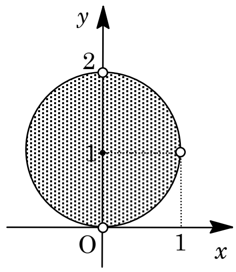
$$b = \frac{ax}{x-1} = \frac{y}{x(x-1)} \text{ ………⑨}$$

⑨より，$b \neq 0$ なので，$y \neq 0$ である。

したがって，接点$(x,\ y)$の条件は，

$$x^2 + (y-1)^2 \leqq 1,\quad x \neq 0,\quad x \neq 1,\quad y \neq 0$$

これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，y 軸上の点および点$(1,\ 1)$は除く。



［解 説］

接点の軌跡を求める基本的な問題ですが，$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ という条件から派生する詰めの段階がやや面倒です。

© 電送数学舎 2018

$\boxed{2}$

問題のページへ

以下，mod3 で記すと，$9\equiv 0$ に注意して，

(i)　$n\equiv 0$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 0-0+0=0$

(ii)　$n\equiv 1$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 1-7+0=-6\equiv 0$

(iii)　$n\equiv 2$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 8-14+0=-6\equiv 0$

(i)～(iii)より，n^3-7n+9 はつねに 3 の倍数である。

すると，n^3-7n+9 が素数となるのは，$n^3-7n+9=3$ の場合だけであり，

$$n^3-7n+6=0\,,\ (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

以上より，求める整数 n は，$n=1,\ 2,\ -3$ である。

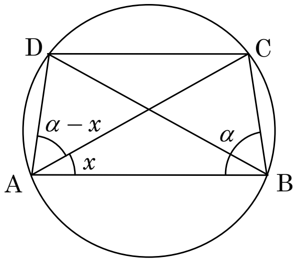
［解　説］

まず，n^3-7n+9 の因数分解を考えたところうまくいかなかったため，次の手は，$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$ として実験です。すると，すべて 3 の倍数になることがわかり……。

© 電送数学舎 2018

3

問題のページへ



半径 1 の円に内接する四角形 ABCD に対して，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha\left(0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$から，

$$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{ADC}=\pi-\alpha$$

これより，四角形 ABCD は AB // DC の等脚台形である。

さて，$\angle\mathrm{BAC}=x\ (0<x<\alpha)$ とおくと，$\angle\mathrm{CAD}=\alpha-x$，$\angle\mathrm{ACB}=\pi-(\alpha+x)$ となり，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin x}=2\cdot 1,\ \ \frac{\mathrm{CD}}{\sin(\alpha-x)}=2\cdot 1,\ \ \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\alpha+x)}=2\cdot 1$$

すると，$\mathrm{BC}=2\sin x$，$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-x)$，$\mathrm{AB}=2\sin(\alpha+x)$ となり，$\mathrm{DA}=\mathrm{BC}$ から，4 辺の長さの積 $k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ は,

$$\begin{aligned}k&=16\sin^2x\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)=8\sin^2x(\cos2x-\cos2\alpha)\\&=8\sin^2x(1-2\sin^2x-1+2\sin^2\alpha)=-16\sin^4x+16\sin^2\alpha\sin^2x\\&=-16\left(\sin^2x-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2+4\sin^4\alpha\end{aligned}$$

$0<x<\alpha$ なので $0<\sin x<\sin\alpha$ となり，$\sin^2x=\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha\left(\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$のとき，$k$ は最大値 $4\sin^4\alpha$ をとる。

［解　説］

円に内接する台形は等脚台形となりますが，これに正弦定理の適用させて 4 辺の長さを評価する問題です。

© 電送数学舎 2018

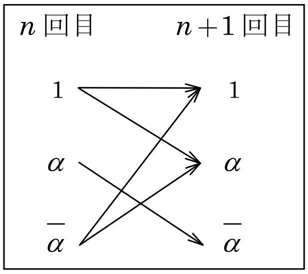
$\boxed{4}$ 問題のページへ

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ とおくと，

$$\alpha^2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=\overline{\alpha}，\ \alpha^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

さて，コインを投げ，1 回目に表が出れば $z_1=\alpha$，裏が出れば $z_1=1$ とし，$k\geqq 2$ において k 回目に表が出れば $z_k=\alpha z_{k-1}$，裏が出れば $z_k=\overline{z_{k-1}}$ とする。

ここで，$z_n=1$，$z_n=\alpha$，$z_n=\overline{\alpha}$ である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とおくと，$p_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=\dfrac{1}{2}$，$r_1=0$ のもとで，



$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots①$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots②$$

①②から $n\geqq 2$ で $p_n=q_n$ となり，さらに $p_1=q_1=\dfrac{1}{2}$ から，$n\geqq 1$ で $p_n=q_n$ である。

そこで，$p_n+q_n+r_n=1$ に注意すると，①より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n-q_n)=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}(1-2p_n)=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}$$

変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ である。

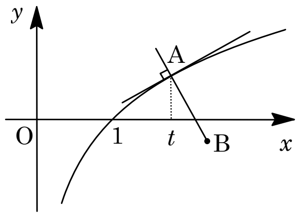
［解　説］

確率と漸化式の問題に，複素数が味付けされています。樹形図を書いていくと，漸化式という方針が見えてきます。

© 電送数学舎 2018

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　$y=\log x$ に対し，$y'=\dfrac{1}{x}$ となるので，点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における接線の方向ベクトルの成分を $\left(1,\ \dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t}(t,\ 1)$ とすることができる。

これより，法線の方向ベクトルの成分を $(1,\ -t)$ とおくことができ，$\mathrm{AB}=1$ かつ B の x 座標が t より大きいことに注意すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ -t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ -t)=\left(t+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \log t-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

ここで，$\mathrm{B}(u(t),\ v(t))$ より，$u(t)=t+\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$v(t)=\log t-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ となり，

$$\frac{du}{dt}=1+\frac{-\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t}{1+t^2}=1-\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{t}-\frac{\sqrt{1+t^2}-t\cdot\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t}{1+t^2}=\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

よって，$\left(\dfrac{du}{dt},\ \dfrac{dv}{dt}\right)=\left\{1-\dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\right\}\left(1,\ \dfrac{1}{t}\right)$ である。

(2)　t が $r\,(0<r<1)$ から 1 まで動くとき，点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r)$，$L_2(r)$ とすると，

$$L_1(r)=\int_r^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_r^1\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt$$

また，$\sqrt{\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left\{1-\dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\right\}^2\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}$ となり，$r\leqq t\leqq 1$ において，$1-\dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{(1+t^2)^3}-t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}>0$ から，

$$L_2(r)=\int_r^1\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=\int_r^1\left\{1-\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\right\}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt$$

$$L_1(r)-L_2(r)=\int_r^1\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt$$

$$=\int_r^1\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt=\int_r^1\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

ここで，$t=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおき，$r=\tan\alpha$ とすると，

© 電送数学舎 2018

$$L_1(r)-L_2(r)=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}-\alpha$$

したがって，$r\to+0$ のとき $\alpha\to+0$ なので,

$$\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))=\lim_{\alpha\to+0}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\pi}{4}$$

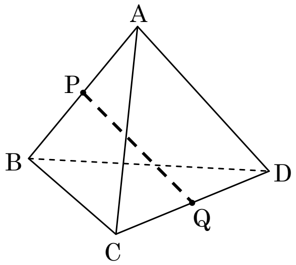
［解 説］

微積分の総合問題です。計算はやや面倒です。

© 電送数学舎 2018

$\boxed{6}$

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\rm AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\rm AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\rm AD}=\vec{d}$ とおく。

まず，$|\overrightarrow{\rm AC}|=|\overrightarrow{\rm BD}|$ より，$|\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{b}|$ となり，

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$|\overrightarrow{\rm AD}|=|\overrightarrow{\rm BC}|$ より，$|\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{b}|$ となり，

$$|\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2$ となり，

$$|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d} \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，点 P，点 Q は，それぞれ辺 AB，辺 CD の中点なので，

$$\overrightarrow{\rm PQ}=\overrightarrow{\rm AQ}-\overrightarrow{\rm AP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

ここで，$\overrightarrow{\rm PQ}\cdot\overrightarrow{\rm AB}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d})$

すると，③から $\overrightarrow{\rm PQ}\cdot\overrightarrow{\rm AB}=0$ となるので，$\rm PQ\perp AB$ である。

(2)　①③より，$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$ となり，

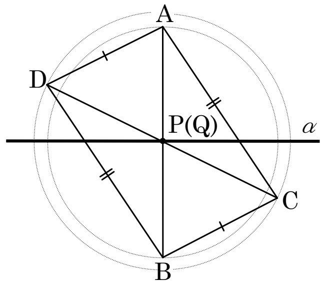
$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d} \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$\overrightarrow{\rm PQ}\cdot\overrightarrow{\rm CD}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(-\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2)$

すると，④から $\overrightarrow{\rm PQ}\cdot\overrightarrow{\rm CD}=0$ となるので，$\rm PQ\perp CD$ である。

これより，線分 PQ を軸として四面体 ABCD を 180° 回転すると，頂点 A は B，頂点 B は A，頂点 C は D，頂点 D は C に一致する。すなわち，四面体 ABCD は線分 PQ を軸とした回転対称になっている。

よって，線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を 2 つの部分に分けたとき，線分 PQ を軸として，その一方を 180° 回転すると，もう一方に重なる。言い換えると，α によって分けられた 2 つの部分の体積は等しい。



［解　説］

立体の性質に関する問題です。(1)はオーソドックスにベクトルを利用した解で記しました。(2)では，(1)と同様に考えると，$\rm PQ\perp CD$ になることが推測できます。それを示した後，半直線 QP 上に視点をもってくると上図のようになり，回転対称という構図が見えてきます。

© 電送数学舎 2018