

1

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

問1  $a$  は実数とする。 $x$  に関する整式  $x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2$  を整式  $x^3 + x^2 + x + 1$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $R(x)$  とする。 $R(x)$  の  $x$  の1次の項の係数が1のとき,  $a$  の値を定め, さらに  $Q(x)$  と  $R(x)$  を求めよ。

問2  $8.94^{18}$  の整数部分は何桁か。また最高位からの2桁の数字を求めよ。例えば,  $12345.6789$  の最高位からの2桁は12を指す。

2

解答解説のページへ

$a$  は実数とし、 $b$  は正の定数とする。 $x$  の関数  $f(x) = x^2 + 2(ax + b|x|)$  の最小値  $m$  を求めよ。さらに、 $a$  の値が変化するとき、 $a$  の値を横軸に、 $m$  の値を縦軸にとって  $m$  のグラフをかけ。

3

解答解説のページへ

$a, b, c$  は実数とする。次の命題が成立するための、 $a$  と  $c$  が満たすべき必要十分条件を求めよ。さらに、この  $(a, c)$  の範囲を図示せよ。

命題：すべての実数  $b$  に対して、ある実数  $x$  が不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  を満たす。

4

解答解説のページへ

1 つのさいころを  $n$  回続けて投げ、出た目を順に  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする。このとき次の条件を満たす確率を  $n$  を用いて表せ。ただし  $X_0 = 0$  としておく。

条件： $1 \leq k \leq n$  を満たす  $k$  のうち、 $X_{k-1} \leq 4$  かつ  $X_k \geq 5$  が成立するような  $k$  の値はただ 1 つである。

5

解答解説のページへ

半径 1 の球面上の 5 点  $A, B_1, B_2, B_3, B_4$  は、正方形  $B_1B_2B_3B_4$  を底面とする四角錐をなしている。この 5 点が球面上を動くとき、四角錐  $AB_1B_2B_3B_4$  の体積の最大値を求めよ。

常用対数表（一）

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第 5 位を四捨五入し、小数第 4 位まで掲載している。

常用対数表（二）

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第 5 位を四捨五入し、小数第 4 位まで掲載している。

1

問題のページへ

問 1  $A(x) = x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2$  を  $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  で割ると,

$$A(x) = B(x)(x^2 + x + a - 2) - (a - 3)x^2 - (a - 4)x - (a - 4)$$

これより,  $Q(x) = x^2 + x + a - 2$ ,  $R(x) = -(a - 3)x^2 - (a - 4)x - (a - 4)$

すると, 条件より  $-(a - 4) = 1$  から,  $a = 3$  となり,

$$Q(x) = x^2 + x + 1, \quad R(x) = x + 1$$

問 2  $x = 8.94^{18}$  とおくと,  $\log_{10} x = 18 \log_{10} 8.94$  となり, 常用対数表から,

$$0.951 < \log_{10} 8.94 < 0.952$$

すると,  $17.118 < \log_{10} x < 17.136$  となり,  $x$  の整数部分は 18 桁である。

さらに,  $\log_{10} 1.3 < 0.118$ ,  $0.136 < \log_{10} 1.4$  から,

$$17 + \log_{10} 1.3 < \log_{10} x < 17 + \log_{10} 1.4, \quad 1.3 \times 10^{17} < x < 1.4 \times 10^{17}$$

よって,  $x$  の最高位からの 2 桁は 13 である。

### [解説]

整式の除法と対数計算という単問 2 題の構成です。対数計算については、概数計算でなく不等式での評価が必要です。数値計算が面倒なので、最初は小数第 2 位までで  $\log_{10} 8.94$  を評価しましたが、甘すぎてやり直しになりました。



2

問題のページへ

$b > 0$  のとき、 $f(x) = x^2 + 2(ax + b|x|)$  に対して、 $f(x)$  の最小値を  $m$  とし、 $x \geq 0$  のときの最小値を  $m_1$ 、 $x \leq 0$  のときの最小値を  $m_2$  とおくと、

$$(i) \quad x \geq 0 \text{ のとき} \quad f(x) = x^2 + 2(a+b)x = (x+a+b)^2 - (a+b)^2$$

$$(i-i) \quad -a-b \geq 0 \quad (a \leq -b) \text{ の場合} \quad m_1 = f(-a-b) = -(a+b)^2$$

$$(i-ii) \quad -a-b < 0 \quad (a > -b) \text{ の場合} \quad m_1 = f(0) = 0$$

$$(ii) \quad x \leq 0 \text{ のとき} \quad f(x) = x^2 + 2(a-b)x = (x+a-b)^2 - (a-b)^2$$

$$(ii-i) \quad -a+b \geq 0 \quad (a \leq b) \text{ の場合} \quad m_2 = f(0) = 0$$

$$(ii-ii) \quad -a+b < 0 \quad (a > b) \text{ の場合} \quad m_2 = f(-a+b) = -(a-b)^2$$

(i)(ii) より、 $m$  は  $m_1$  と  $m_2$  の大きくない方なので、

$$m = \min\{m_1, m_2\}$$

(a)  $a < -b$  のとき

$$m = \min\{-(a+b)^2, 0\} = -(a+b)^2$$

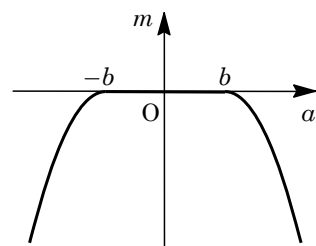
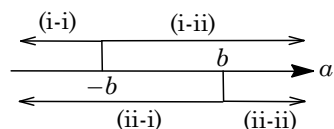
(b)  $-b \leq a < b$  のとき

$$m = \min\{0, 0\} = 0$$

(c)  $a \geq b$  のとき

$$m = \min\{0, -(a-b)^2\} = -(a-b)^2$$

(a)~(c) より、 $m$  のグラフは右図の太線部である。



### 【解説】

内容はありふれた 2 次関数の最大・最小問題ですが、文字の交通整理が必要です。なお、(a)~(c) の場合分けから始めるという手もあります。

3

問題のページへ

すべての実数  $b$  に対して、ある実数  $x$  が不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  を満たす条件を求めるために、まず  $a > 0$ ,  $a = 0$ ,  $a < 0$  に場合分けをする。

(i)  $a > 0$  のとき

ある実数  $x$  が不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  を満たす条件は、 $ax^2 + bx + c = 0$  の判別式を  $D$  とすると、 $D = b^2 - 4ac > 0$  すなわち  $4ac < b^2 \cdots \cdots (*)$  である。

(\*) がすべての実数  $b$  に対して成り立つ条件は、 $ac < 0$  となり、さらに  $a > 0$  から  $c < 0$  である。

(ii)  $a = 0$  のとき

ある実数  $x$  が不等式  $bx + c < 0$  を満たす条件は、

$$(b \neq 0 \text{ かつ } c \text{ は任意}) \text{ または } (b = 0 \text{ かつ } c < 0)$$

そして、この条件がすべての実数  $b$  に対して成り立つ条件は、 $c < 0$  である。

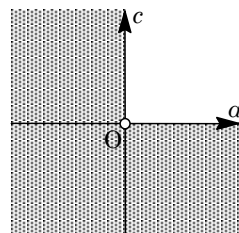
(iii)  $a < 0$  のとき

$b$  と  $c$  は任意で、不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  を満たすある実数  $x$  が存在する。すなわち、すべての実数  $b$  に対しても、 $c$  は任意で命題は成り立つ。

(i)~(iii)より、求める条件は、

$$c < 0 \text{ (} a \geq 0 \text{ のとき), } c \text{ は任意 (} a < 0 \text{ のとき)}$$

そして、 $(a, c)$  の範囲を図示すると、右図の網点部になる。ただし、境界は領域に含まない。



### [解説]

不等式の成立条件を問う問題ですが、内容的には、命題の「ある～」や「すべての～」という意味の把握がポイントになっています。

4

問題のページへ

1 つのさいころを  $n$  回続けて投げ、出た目を順に  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とするとき、 $X_{k-1} \leq 4$  かつ  $X_k \geq 5$  が成立するような  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) がただ 1 つという条件を満たす場合は、 $X_0 = 0$  から、 $2 \leq k \leq n$ 、 $1 \leq l \leq n - k + 1$  として、

$$X_i \leq 4 \quad (1 \leq i \leq k-1), \quad X_i \geq 5 \quad (k \leq i \leq k+l-1), \quad X_i \leq 4 \quad (k+l \leq i \leq n)$$

この確率を  $P_{k,l}$  とおくと、 $k = n$  のときも含めて、

$$P_{k,l} = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{6}\right)^l \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k-l+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l} \left(\frac{1}{3}\right)^l = \frac{2^{n-l}}{3^n}$$

ここで、 $k$  の値を固定し、 $l = 1, 2, \dots, n - k + 1$  について、その和を  $P_k$  とおくと、

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{l=1}^{n-k+1} P_{k,l} = \frac{1}{3^n} \sum_{l=1}^{n-k+1} 2^{n-l} = \frac{1}{3^n} \sum_{l=k-1}^{n-1} 2^l = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{2^{k-1}(2^{n-k+1} - 1)}{2 - 1} \\ &= \frac{2^n - 2^{k-1}}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^{k-1}}{3^n} \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

また、 $k = 1$  のとき、 $X_0 = 0$  から、 $1 \leq l \leq n$  として、

$$X_i \geq 5 \quad (1 \leq i \leq l), \quad X_i \leq 4 \quad (l+1 \leq i \leq n)$$

$$\text{この確率を } R_{1,l} \text{ とおくと、} R_{1,l} = \left(\frac{2}{6}\right)^l \left(\frac{4}{6}\right)^{n-l} = \left(\frac{1}{3}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l} = \frac{2^{n-l}}{3^n}$$

上式は  $l = n$  のときも成立し、 $l = 1, 2, \dots, n$  について、その和を  $R_1$  とおくと、

$$R_1 = \sum_{l=1}^n R_{1,l} = \frac{1}{3^n} \sum_{l=1}^n 2^{n-l} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}$$

すると、 $k = 1$  のときも (\*) は成立している。

以上より、求める確率  $P$  は、

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^n P_k = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^{k-1}}{3^n} \right\} = n \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = n \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n} \\ &= (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

### 【解説】

与えられた条件を正確に把握して、確率を計算する問題です。問題文に「ただし  $X_0 = 0$  としておく」と軽く記されていることが、着眼点として最優先のことからでした。

5

問題のページへ

半径 1 の球面を  $C: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$  とおき,  $C$  上の 5 点  $A, B_1, B_2, B_3, B_4$  に対して, 正方形  $B_1B_2B_3B_4$  を含む平面を  $z = t \cdots \cdots \textcircled{2}$  とする。

ここで, 対称性から  $-1 < t \leq 0$  とすると, 四角錐  $AB_1B_2B_3B_4$  の体積の最大となるのは,  $A(0, 0, 1)$  のときである。

さて, 球面  $C$  の平面  $z = t$  による切り口は,  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から,

$$x^2 + y^2 + t^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 1 - t^2$$

平面  $z = t$  上の正方形  $B_1B_2B_3B_4$  は,  $B_1B_3$  を  $x$  軸方向,  $B_2B_4$  を  $y$  軸方向にとると, 右図のようになり, その面積  $S$  は,

$$S = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - t^2})^2 = 2(1 - t^2)$$

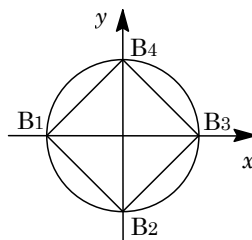
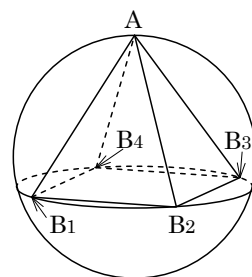
したがって, 四角錐  $AB_1B_2B_3B_4$  の体積  $V$  は,

$$V = \frac{1}{3} S(1 - t) = \frac{2}{3} (1 - t^2)(1 - t) = \frac{2}{3} (1 + t)(1 - t)^2$$

$$V' = \frac{2}{3} \{ (1 - t)^2 - 2(1 + t)(1 - t) \}$$

$$= -\frac{2}{3} (1 - t)(1 + 3t)$$

すると,  $V$  の増減は右表のようになり,  $t = -\frac{1}{3}$  のとき  $V$  は最大値  $\frac{64}{81}$  をとる。



$t$	-1	...	$-\frac{1}{3}$	...	0
$V'$		+	0	-	
$V$		↗	$\frac{64}{81}$	↘	$\frac{2}{3}$

[解説]

球面に内接する四角錐を題材にした図形の計量に関する基本的な問題です。いろいろな解法がありますが, 解答例では座標系を設定しました。計算も面倒ではありません。