1

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

問１　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ。ただし，p が素数のとき，$\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてもよい。

問２　次の定積分の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

2

解答解説のページへ

$f(x)=x^3+2x^2+2$ とする。$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

鋭角三角形 ABC を考え，その面積を S とする。$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，線分 AC を $t:1-t$ に内分する点を Q，線分 BQ を $t:1-t$ に内分する点を P とする。実数 t がこの範囲を動くときに点 P の描く曲線と，線分 BC によって囲まれる部分の面積を，S を用いて表せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。このとき次の条件を満たす確率を n を用いて表せ。ただし $X_0 = 0$ としておく。

条件：$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

半径 1 の球面上の 5 点 A，B_1，B_2，B_3，B_4 は，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面とする四角錐をなしている。この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積の最大値を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

i は虚数単位とする。$(1+i)^n+(1-i)^n>10^{10}$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。

常用対数表（一）

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している。

常用対数表（二）

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している。

1　問題のページへ

問 1　$c=\cos\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，条件から，$c$ は正で有理数ではなく，

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2c^2 - 1,\ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4c^3 - 3c$$

すると，$c^2=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$ となり，$\cos 2\theta$ が有理数から c^2 は有理数である。

さらに，$\cos 3\theta = c(4c^2-3)$ となるので，$4c^2-3\neq 0$ のときは,

$$c=\frac{\cos 3\theta}{4c^2-3}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\cos 3\theta$ と $4c^2-3$ は有理数より$(*)$の右辺は有理数となるが，左辺は有理数でないので，$(*)$は成立しない。

よって，$4c^2-3=0$ となり，$c>0$ から $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるので，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

逆に，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ は有理数でなく，$\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}$ と $\cos 3\theta = 0$ はともに有理数である。

問 2　(1)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$ とおくと，

$$I=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\frac{\pi}{4}\cdot 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log 1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

(2)　$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$ とおくと，

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\log|1-\sin x|+\log|1+\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\Big[\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\log 1\right)=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2=\log(\sqrt{2}+1)$$

［解 説］

背理法を用いる三角関数が題材の問題，および定積分の基本的な計算問題という単問２題の構成です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

整数 n に対し，$f(n)=n^3+2n^2+2=n^3+2(n^2+1)$ より n を偶奇に場合分けする。

(i)　n が偶数のとき

このとき，$|f(n)|$ は偶数となり，$n+1$ は奇数から $|f(n+1)|$ は奇数である。

そこで，偶数の素数は 2 のみから，$|f(n)|=2$ となり，

$$n^3+2n^2+2=\pm 2$$

(i-i)　$n^3+2n^2+2=2$ のとき

$n^3+2n^2=0$ から $n=0,\ -2$

$n=0$ のとき，$|f(n+1)|=|1^3+2\cdot 1^2+2|=5$ から素数である。

$n=-2$ のとき，$|f(n+1)|=|(-1)^3+2\cdot(-1)^2+2|=3$ から素数である。

(i-ii)　$n^3+2n^2+2=-2$ のとき

$$n^3+2n^2+4=0\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす整数 n は負の偶数しかも 4 の約数から，$n=-2,\ -4$ が考えられる。

ところが，いずれも①は成立しない。

(ii)　n が奇数のとき

このとき，$|f(n)|$ は奇数となり，$n+1$ は偶数から $|f(n+1)|$ は偶数である。

そこで，偶数の素数は 2 のみから，$|f(n+1)|=2$ となり，

$$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=\pm 2$$

(i-i)　$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=2$ のとき

$(n+1)^3+2(n+1)^2=0$ から $n+1=0,\ -2$，すなわち $n=-1,\ -3$

$n=-1$ のとき，$|f(n)|=|(-1)^3+2\cdot(-1)^2+2|=3$ から素数である。

$n=-3$ のとき，$|f(n)|=|(-3)^3+2\cdot(-3)^2+2|=7$ から素数である。

(ii-ii)　$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=-2$ のとき

$$(n+1)^3+2(n+1)^2+4=0\cdots\cdots\cdots②$$

(i-ii)と同様に，②を満たす整数 $n+1$ は存在しない。

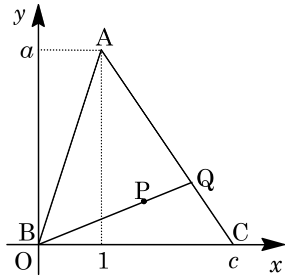
(i)(ii)より，求める整数 n は，$n=0,\ -1,\ -2,\ -3$ である。

［解　説］

素数の絡んだ整数問題です。注目することは，「偶数の素数は 2 だけ」ということです。過去に何度も出題されていることですが。

3

問題のページへ



鋭角三角形 ABC に対し，B(0, 0) とし，頂点 C を x 軸の正の部分にとる。そして，$a>0$，$c>1$ として，A$(1,\ a)$，C$(c,\ 0)$ とおいても一般性を失わない。

ここで，$0<t<1$ として，線分 AC を $t:1-t$ に内分する点を Q，線分 BQ を $t:1-t$ に内分する点を P とすると，

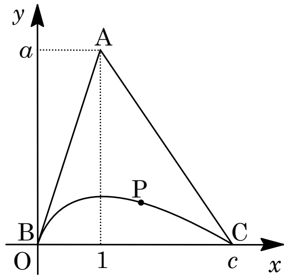
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=t\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\}$$
$$=t(1-t)(1,\ a)+t^2(c,\ 0)$$
$$=(t+(c-1)t^2,\ at-at^2)$$

ここで，P$(x,\ y)$ とおくと，$x=t+(c-1)t^2$，$y=at-at^2$ となり，

$$\frac{dx}{dt}=1+2(c-1)t$$
$$\frac{dy}{dt}=a-2at=a(1-2t)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	
x	0	↗		↗	c
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{a}{4}$	↘	0

すると，x，y の増減は右表のようになり，これより点 P の描く曲線の概形は右下図のようになる。そして，この曲線と線分 BC によって囲まれる部分の面積を S_0 とおくと，



$$S_0=\int_0^c y\,dx$$
$$=\int_0^1(at-at^2)\{1+2(c-1)t\}dt$$
$$=a\int_0^1\{t+(2c-3)t^2-2(c-1)t^3\}dt$$
$$=a\left(\frac{1}{2}+\frac{2c-3}{3}-\frac{c-1}{2}\right)=\frac{1}{6}ac$$

一方，△ABC の面積 S は $S=\frac{1}{2}ac$ なので，

$$S_0=\frac{1}{3}S$$

［解　説］

まず座標系を設定し，パラメータ曲線と x 軸に囲まれた部分の面積を計算しています。なお，△ABC は鋭角三角形ですが，∠A が鋭角という条件は省いています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とするとき，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような $k(1 \leqq k \leqq n)$ がただ 1 つという条件を満たす場合は，$X_0 = 0$ から，$2 \leqq k \leqq n$，$1 \leqq l \leqq n-k+1$ として，

$$X_i \leqq 4\ (1 \leqq i \leqq k-1),\ X_i \geqq 5\ (k \leqq i \leqq k+l-1),\ X_i \leqq 4\ (k+l \leqq i \leqq n)$$

この確率を $P_{k,\,l}$ とおくと，$k=n$ のときも含めて，

$$P_{k,\,l} = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{6}\right)^{l}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-k-l+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}\left(\frac{1}{3}\right)^{l} = \frac{2^{n-l}}{3^n}$$

ここで，k の値を固定し，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n-k+1$ について，その和を P_k とおくと，

$$P_k = \sum_{l=1}^{n-k+1} P_{k,\,l} = \frac{1}{3^n}\sum_{l=1}^{n-k+1} 2^{n-l} = \frac{1}{3^n}\sum_{l=k-1}^{n-1} 2^{l} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^{k-1}(2^{n-k+1}-1)}{2-1}$$
$$= \frac{2^n - 2^{k-1}}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^{k-1}}{3^n}\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$k=1$ のとき，$X_0 = 0$ から，$1 \leqq l \leqq n$ として，

$$X_i \geqq 5\ (1 \leqq i \leqq l),\ X_i \leqq 4\ (l+1 \leqq i \leqq n)$$

この確率を $P_{1,\,l}$ とおくと，$P_{1,\,l} = \left(\frac{2}{6}\right)^{l}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-l} = \left(\frac{1}{3}\right)^{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l} = \frac{2^{n-l}}{3^n}$

上式は $l=n$ のときも成立し，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，その和を P_1 とおくと，

$$P_1 = \sum_{l=1}^{n} P_{1,\,l} = \frac{1}{3^n}\sum_{l=1}^{n} 2^{n-l} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^n-1}{2-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}$$

すると，$k=1$ のときも$(*)$は成立している。

以上より，求める確率 P は，

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^{k-1}}{3^n}\right\} = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^n-1}{2-1} = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n}$$
$$= (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

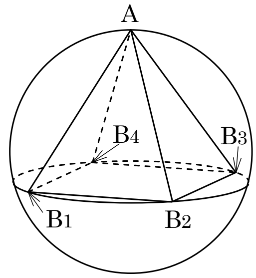
［解 説］

与えられた条件を正確に把握して，確率を計算する問題です。問題文に「ただし $X_0 = 0$ としておく」と軽く記されていることが，着眼点として最優先のことがらでした。

$\boxed{5}$

問題のページへ

半径 1 の球面を$C: x^2+y^2+z^2=1$……①とおき，C 上の 5 点A，B_1，B_2，B_3，B_4 に対して，正方形$B_1B_2B_3B_4$を含む平面を$z=t$……②とする。

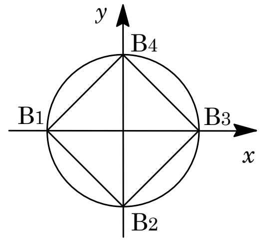


ここで，対称性から$-1<t\leqq 0$とすると，四角錐$AB_1B_2B_3B_4$の体積の最大となるのは，$A(0,\ 0,\ 1)$のときである。

さて，球面Cの平面$z=t$による切り口は，①②から，

$$x^2+y^2+t^2=1,\ x^2+y^2=1-t^2$$

平面$z=t$上の正方形$B_1B_2B_3B_4$は，B_1B_3をx軸方向，B_2B_4をy軸方向にとると，右図のようになり，その面積Sは，



$$S=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-t^2}\right)^2=2(1-t^2)$$

したがって，四角錐$AB_1B_2B_3B_4$の体積Vは，

$$V=\frac{1}{3}S(1-t)=\frac{2}{3}(1-t^2)(1-t)=\frac{2}{3}(1+t)(1-t)^2$$

$$V'=\frac{2}{3}\left\{(1-t)^2-2(1+t)(1-t)\right\}$$

$$=-\frac{2}{3}(1-t)(1+3t)$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

すると，V の増減は右表のようになり，$t=-\frac{1}{3}$のときVは最大値$\frac{64}{81}$をとる。

［解　説］

球面に内接する四角錐を題材にした図形の計量に関する基本的な問題です。いろいろな解法がありますが，解答例では座標系を設定しました。計算も面倒でありません。

6

問題のページへ

まず，$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$なので，

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi\right)=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi\right)$$

$$(1-i)^n=(\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(-\frac{n}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{n}{4}\pi\right)\right\}=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n}{4}\pi-i\sin\frac{n}{4}\pi\right)$$

すると，$(1+i)^n+(1-i)^n=2\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n}{4}\pi=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\dfrac{n}{4}\pi$ となり，条件から，

$$2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n}{4}\pi>10^{10}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$n\equiv 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\pmod 8$ のとき，$\cos\dfrac{n}{4}\pi\leqq 0$ なので，①を満たさない。

これより，$n\equiv 0,\ 1,\ 7\pmod 8$ の場合を考える。

(i)　$n\equiv 0\pmod 8$ のとき

$\cos\dfrac{n}{4}\pi=1$ から，①は $2^{\frac{n+2}{2}}>10^{10}$ となり，$\dfrac{n+2}{2}\log_{10}2>10$ より，

$$n>\frac{20}{\log_{10}2}-2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，常用対数表から $0.300<\log_{10}2<0.302$ なので，$64.2<\dfrac{20}{\log_{10}2}-2<64.7$

すると，②は $n\geqq 65$ となり，$n\equiv 0\pmod 8$ を満たす最小の正の整数 n は，

$$n=8\times 9=72$$

(ii)　$n\equiv 1,\ 7\pmod 8$ のとき

$\cos\dfrac{n}{4}\pi=2^{-\frac{1}{2}}$ から，①は $2^{\frac{n+2}{2}-\frac{1}{2}}>10^{10}$ となり，$\dfrac{n+1}{2}\log_{10}2>10$ より，

$$n>\frac{20}{\log_{10}2}-1\cdots\cdots\cdots②$$

(i)と同様にすると，$65.2<\dfrac{20}{\log_{10}2}-1<65.7$

すると，②は $n\geqq 66$ となり，$n\equiv 1,\ 7\pmod 8$ を満たす最小の正の整数 n は，

$$n=8\times 8+7=71$$

(i)(ii)より，①を満たす最小の正の整数 n は $n=71$ である。

［解　説］

ド・モアブルの定理と対数計算の融合問題です。常用対数表を，数値の不等式での評価として利用することは「常識」と考えてください。