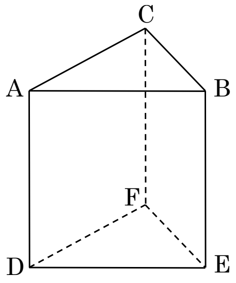
1

解答解説のページへ

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

2

解答解説のページへ



右図の三角柱 ABC-DEF において，A を始点として，辺に沿って頂点を n 回移動する。すなわち，この移動経路

$$P_0 \to P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_{n-1} \to P_n \quad (\text{ただし}\ P_0 = A)$$

において，P_0P_1，P_1P_2，…，$P_{n-1}P_n$ はすべて辺であるとする。また，同じ頂点を何度通ってもよいものとする。このような移動経路で，終点 P_n が A，B，C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ。

$\boxed{3}$　解答解説のページへ

xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 は直交し，交点の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ である。また，L_1，L_2 はともに曲線 $C: y=\dfrac{x^2}{4}$ に接している。このとき，L_1，L_2 および C で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

a, b を正の実数とする。直線 $L: ax+by=1$ と曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ との 2 つの交点のうち, y 座標が正のものを P, 負のものを Q とする。また, L と x 軸との交点を R とし, L と y 軸との交点を S とする。a, b が条件 $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}=\sqrt{2}$ を満たしながら動くとき, 線分 PQ の中点の軌跡を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

四面体 OABC が，$OA=4$，$OB=AB=BC=3$，$OC=AC=2\sqrt{3}$ を満たしているとする。P を辺 BC 上の点とし，$\triangle OAP$ の重心を G とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$ を示せ。

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ。

1

問題のページへ

$A=\log_4 2022$ とおくと，$2022=2\times1011$ より，

$$A=\frac{\log_{10}2022}{\log_{10}4}=\frac{\log_{10}2+\log_{10}1011}{2\log_{10}2}=\frac{1}{2}+\frac{\log_{10}1011}{2\log_{10}2}$$

ここで，$10^3<1011<2^{10}$ より，$3<\log_{10}1011<10\log_{10}2$ となり，

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2\log_{10}2}<A<\frac{1}{2}+\frac{10}{2}=5.5\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2\log_{10}2}>0.5+\dfrac{3}{2\times0.3011}>0.5+4.9=5.4$ なので，$(*)$から，

$$5.4<A<5.5\,,\ \ 5.4<\log_4 2022<5.5$$

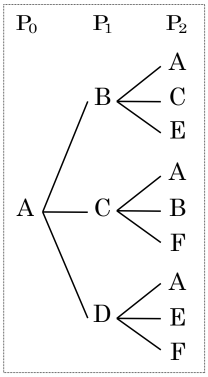
［解　説］

対数の値の評価式を証明する基本的な問題です。

2

問題のページへ

終点P_nが，三角柱の上面にある A, B, C のいずれかとなるものの総数をa_n，下面にある D，E，F のいずれかとなるものの総数をd_nとおくと，$a_1=2$，$d_1=1$で，



$$a_{n+1}=2a_n+d_n\cdots\cdots①,\ \ d_{n+1}=a_n+2d_n\cdots\cdots②$$

①＋②より，$a_{n+1}+d_{n+1}=3(a_n+d_n)$となり，

$$a_n+d_n=(a_1+d_1)\cdot 3^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}=3^n\cdots\cdots\cdots③$$

①－②より，$a_{n+1}-d_{n+1}=a_n-d_n$となり，

$$a_n-d_n=a_1-d_1=1\cdots\cdots\cdots④$$

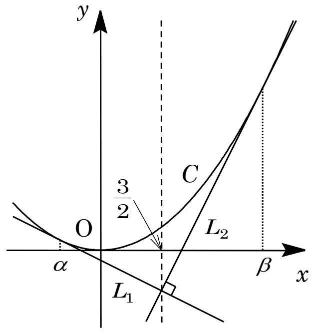
③④より，$2a_n=3^n+1$となり，$a_n=\dfrac{1}{2}(3^n+1)$

［解 説］

確率と漸化式についての問題です。ポイントは，漸化式を立式するという発想です。

3

問題のページへ



曲線 $C : y = \dfrac{x^2}{4}$ に対して $y' = \dfrac{x}{2}$ となり，C 上の 2 つの点 $\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha^2}{4}\right)$，$\left(\beta,\ \dfrac{\beta^2}{4}\right)$ $(\alpha < \beta)$ における接線を，それぞれ L_1，L_2 とすると，

$$L_1 : y - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha}{2}(x-\alpha),\ \ y = \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{4} \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に，$L_2 : y = \dfrac{\beta}{2}x - \dfrac{\beta^2}{4} \cdots\cdots\cdots ②$

①②を連立して，$\dfrac{\alpha}{2}x - \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{\beta}{2}x - \dfrac{\beta^2}{4}$ から，$(\alpha-\beta)x = \dfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)$ となり，

$$x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

L_1，L_2 の交点の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ より，$\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \dfrac{3}{2}$ となり，$\alpha+\beta = 3 \cdots\cdots\cdots ③$

また，L_1，L_2 は直交するので，$\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\beta}{2} = -1$ となり，$\alpha\beta = -4 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，α，β は 2 次方程式 $t^2-3t-4=0$ すなわち $(t+1)(t-4)=0$ の 2 つの解となる。$\alpha<\beta$ から $\alpha=-1$，$\beta=4$ なので，①②から，

$$L_1 : y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4},\ \ L_2 : y = 2x-4$$

このとき，L_1，L_2 および C で囲まれる図形の面積 S は，

$$S = \int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{4}\left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(x+1)^2dx + \frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}}^{4}(x-4)^2dx = \frac{1}{12}\Big[(x+1)^3\Big]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}\Big[(x-4)^3\Big]_{\frac{3}{2}}^{4}$$

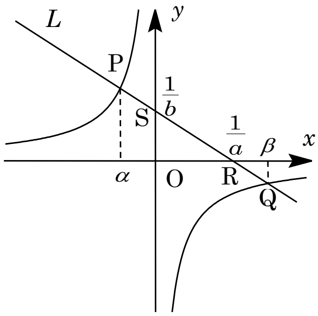
$$= \frac{1}{12}\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{48}$$

［解 説］

放物線の接線を題材にし，面積計算を絡めた超頻出題です。

4

問題のページへ



$a>0$，$b>0$ のとき，直線 $L: ax+by=1$ ……①と曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ ……②を連立して，

$$ax-\frac{b}{x}=1,\ ax^2-x-b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，①②の交点が $\mathrm{P}\left(\alpha,\ -\dfrac{1}{\alpha}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\beta,\ -\dfrac{1}{\beta}\right)$ となり，

$$\alpha+\beta=\frac{1}{a}\cdots\cdots\cdots④,\ \alpha\beta=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，L と x 軸の交点は $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$，$y$ 軸との交点は $\mathrm{S}\left(0,\ \dfrac{1}{b}\right)$ である。

条件より，$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}=\sqrt{2}$ なので $\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\,\mathrm{RS}$ となり，$\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{a}$ ………⑥

④⑥より，$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2a}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2a}$ となり，⑤に代入すると，

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2a}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2a}=-\frac{b}{a},\ \frac{-1}{4a^2}=-\frac{b}{a},\ ab=\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，線分 PQ の中点を $\mathrm{M}(x,\ y)$ とおくと，④⑤より，

$$x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2a},\ y=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1}{2b}$$

⑦に代入して $xy=1$ となり，$a>0$，$b>0$ より $x>0$，$y>0$ となる。

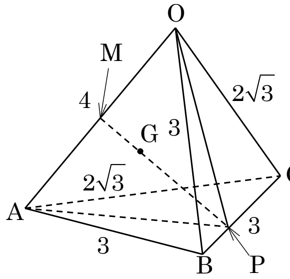
したがって，点 M の軌跡は，曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ である。

［解　説］

軌跡についての基本題です。解答例では文字が多く現れますが，まとめるのに苦労することはないでしょう。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$ である四面体 OABC に対して, P を辺 BC 上の点, M を辺 OA の中点とし, $\triangle\mathrm{OAP}$ の重心を G とする。

まず, $\triangle\mathrm{ABC}$ と$\triangle\mathrm{OBC}$ は合同なので $\mathrm{PA}=\mathrm{PO}$ が成り立ち, $\triangle\mathrm{POA}$ は二等辺三角形である。

すると, 中線 PM と辺 OA は直交するので, $\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。

(2)　$\mathrm{PG}:\mathrm{GM}=2:1$ より, $\mathrm{PG}=\dfrac{2}{3}\mathrm{PM}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\mathrm{PA}^2-2^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\mathrm{PA}^2-4}$ ………(＊)

ここで, $\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{3^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot3\cdot3}=\dfrac{1}{3}>0$ より, $\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形となるので, PA が最小となるのは, 点 P が A から辺 BC の下ろした垂線と辺 BC との交点のときである。このとき,

$$\mathrm{PA}=3\sin\angle\mathrm{ABC}=3\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

よって, (＊)から, PG の最小値は $\dfrac{2}{3}\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}=\dfrac{4}{3}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの応用題としても解けますが, 記述量を考えると, 三角比の四面体への応用として処理した方がよいでしょう。