1

解答例のページへ

次の各問いに答えよ。

(1)　x, y, z は実数で，$2025^x = 3^y = 5^z$ を満たすとする。このとき $2xy + 4xz - yz = 0$ であることを示せ。

(2)　$n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

実数 a, b についての次の条件(＊)を考える。

(＊)　ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2=f(f(x))+c$$ が成り立つ。

この条件(＊)を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

3

解答例のページへ

n は正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ，表が出たら 1，裏が出たら 2 と記録する。この試行を n 回繰り返し，記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る。ただし，数の表し方は十進法とする。このとき，X が 6 で割り切れる確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

座標平面において，曲線 $C_1 : y = x^2 - 2|x|$，曲線 $C_2 : y = x^2 - 5x + \dfrac{7}{4}$，直線 $l_1 : x = \dfrac{3}{2}$ を考える。

(1) 点$(0,\ 0)$と異なる点でC_1と接し，さらにC_2とも接するような直線l_2がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) C_1とl_2の共有点を P とし，その x 座標を α とする。また，l_1とl_2の共有点を Q とし，C_1とl_1の共有点を R とする。曲線C_1の$\alpha \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$の部分，線分 PQ，および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ。

5

解答例のページへ

　座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L, 直線 OB 上の点 M, 直線 OC 上の点 N を, $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つようにとる。s, t, u が $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき, 3 点 L, M, N の定める平面 LMN は, s, t, u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ。

1　　問題のページへ

(1)　$2025^x=3^y=5^z$ のとき，$2025=3^4\cdot 5^2$ から，$(3^2\cdot 5)^{2x}=3^y=5^z$ となり，

$$2x(2\log_{10}3+\log_{10}5)=y\log_{10}3=z\log_{10}5\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$から $\log_{10}3=a$，$\log_{10}5=b$ とし，$2x(2a+b)=ay=bz=k$ とおくと，

$$2xy+4xz-yz=2x(y+2z)-yz=\frac{k}{2a+b}\Big(\frac{k}{a}+\frac{2k}{b}\Big)-\frac{k}{a}\cdot\frac{k}{b}$$

$$=\frac{k^2}{2a+b}\cdot\frac{b+2a}{ab}-\frac{k^2}{ab}=\frac{k^2}{ab}-\frac{k^2}{ab}=0$$

(2)　$n^4+6n^2+23=(n^2+n+3)(n^2-n+4)-n+11$ から，正の整数 n に対して，

$$\frac{n^4+6n^2+23}{n^2+n+3}=n^2-n+4-\frac{n-11}{n^2+n+3}$$

n^4+6n^2+23 が n^2+n+3 で割り切れる条件は，$\dfrac{n^4+6n^2+23}{n^2+n+3}$ が整数，すなわち $\dfrac{n-11}{n^2+n+3}$ が整数であることより，

(i)　$n-11=0$ $(n=11)$ のとき　$\dfrac{n-11}{n^2+n+3}=0$ となり，条件に適する。

(ii)　$n-11\neq 0$ $(n\neq 11)$ のとき　$\dfrac{|n-11|}{n^2+n+3}\geqq 1$ が必要であり，

(ii-i)　$n>11$ のとき　$\dfrac{n-11}{n^2+n+3}\geqq 1$ から，$n-11\geqq n^2+n+3$

すると，$n^2+14\leqq 0$ から，満たす n は存在しない。

(ii-ii)　$0<n<11$ のとき　$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}\geqq 1$ から，$-n+11\geqq n^2+n+3$

すると，$n^2+2n-8\leqq 0$ から $(n-2)(n+4)\leqq 0$ となり，$0<n\leqq 2$ より，

・$n=1$ のとき　$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}=\dfrac{10}{5}=2$ から，条件に適する。

・$n=2$ のとき　$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}=\dfrac{9}{9}=1$ から，条件に適する。

(i)(ii)より，求める正の整数 n は，$n=1,\ 2,\ 11$ である。

［コメント］

(1)は指数方程式の基本的な問題です。(2)は，ときどき見かけるタイプの整数問題です。場合分け(ii)において，必要条件から求めるところがポイントです。

2

問題のページへ

2 次式 $f(x)$ を $f(x)=px^2+qx+r$ とおくと，

$$f(f(x))=f(px^2+qx+r)=p(px^2+qx+r)^2+q(px^2+qx+r)+r$$
$$=p\{p^2x^4+2pqx^3+(q^2+2pr)x^2+2qrx+r^2\}+q(px^2+qx+r)+r$$

さて，条件(∗)より，$\frac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2=f(f(x))+c$ がつねに成り立つので，

$$f(f(x))=\frac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2-c\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①の x^4 の係数，x の係数を比較して，

$$p^3=\frac{1}{8}\cdots\cdots②,\ \ 2pqr+q^2=0\cdots\cdots③$$

②から $p=\frac{1}{2}$ となり，③に代入すると $qr+q^2=0$ から，$q=0$ または $q=-r$

また，①の x^3 の係数，x^2 の係数，定数項を比較して，

$$2p^2q=a\cdots\cdots④,\ \ pq^2+2p^2r+pq=b\cdots\cdots⑤,\ \ pr^2+qr+r=-c\cdots\cdots⑥$$

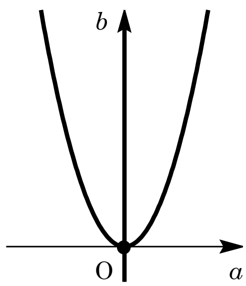
(i)　$p=\frac{1}{2}$，$q=0$ のとき

④から $a=0$，⑤から $b=\frac{1}{2}r$ となり，⑥はある実数 c で成り立ち r は任意より，点 $(a,\ b)$ の集合は直線 $a=0$ である。

(ii)　$p=\frac{1}{2}$，$q=-r$ のとき

④から $a=-\frac{1}{2}r$，⑤から $b=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}r^2$

⑥はある実数 c で成り立ち r は任意より，点 $(a,\ b)$ 全体の集合は，放物線 $b=\frac{1}{2}(-2a)^2=2a^2$ である。



(i)(ii)より，点 $(a,\ b)$ 全体の集合は，右図の太線部である。

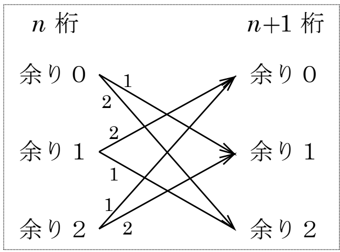
［コメント］

恒等式を題材とした点の集合を求める問題です。

3

問題のページへ

与えられた条件で n 桁の数 X を作るとき, X が 6 で割り切れるのは, X が偶数かつ 3 の倍数のときである。言い換えると, n 回目に硬貨を投げて 2 と記録し, さらに $n-1$ 回目までに記録した数字の和を 3 で割ったときの余りが 1 の場合である。



まず, X を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の確率を, それぞれ a_n, b_n, c_n とおくと, $a_1=0$, $b_1=c_1=\frac{1}{2}$ のもとで,

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)\cdots\cdots\cdots①$$

次に, X が 6 で割り切れる確率を p_n とおくと,

$$p_n=\frac{1}{2}b_{n-1}\quad(n\geqq 2)\cdots\cdots\cdots②$$

①から, $a_n+b_n+c_n=1$ なので, $b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}$ となり,

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

これより, $b_n-\frac{1}{3}=\left(b_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ なので,

$$b_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

すると, ②に代入して, $p_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n\geqq 2)\cdots\cdots\cdots③$

③に $n=1$ をあてはめると $p_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$ となり, このときも成立している。

［コメント］

漸化式と確率の問題です。6 の倍数ということを, 1 の位が 2 かつ各位の数字の和が 3 の倍数として, 漸化式と関連づけることが要点です。

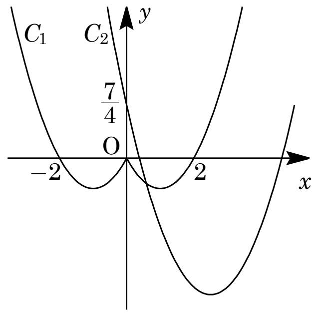
4

問題のページへ

(1)　$C_1 : y = x^2 - 2|x|$ ……①に対して，

$$y = x^2 - 2x\ (x \geqq 0),\quad y = x^2 + 2x\ (x \leqq 0)$$

さて，C_1 と $C_2 : y = x^2 - 5x + \dfrac{7}{4}$ ……②の共通接線 l_2 を求めるために，C_2 上の接点を $\left(t,\ t^2 - 5t + \dfrac{7}{4}\right)$ とおく。



②から $y' = 2x - 5$ なので，l_2 の方程式は，

$$y - \left(t^2 - 5t + \frac{7}{4}\right) = (2t - 5)(x - t)$$

$$y = (2t - 5)x - t^2 + \frac{7}{4} \text{ ………③}$$

(i)　$x \geqq 0$ のとき　①③を連立して，$x^2 - 2x = (2t-5)x - t^2 + \dfrac{7}{4}$ となり，

$$x^2 - (2t - 3)x + t^2 - \frac{7}{4} = 0 \text{ ………④}$$

④が正の重解をもつことより，$D = (2t-3)^2 - 4\left(t^2 - \dfrac{7}{4}\right) = -12t + 16 = 0$

$t = \dfrac{4}{3}$ となり，このとき④の重解は $x = \dfrac{2t-3}{2} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{6} < 0$ から不適である。

(ii)　$x \leqq 0$ のとき　①③を連立して，$x^2 + 2x = (2t-5)x - t^2 + \dfrac{7}{4}$ となり，

$$x^2 - (2t - 7)x + t^2 - \frac{7}{4} = 0 \text{ ………⑤}$$

⑤が負の重解をもつことより，$D = (2t-7)^2 - 4\left(t^2 - \dfrac{7}{4}\right) = -28t + 56 = 0$

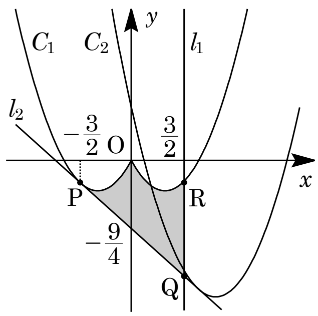
$t = 2$ となり，このとき⑤の重解は $x = \dfrac{2t-7}{2} = 2 - \dfrac{7}{2} = -\dfrac{3}{2} < 0$ から適する。

(i)(ii)より，原点と異なる点で C_1 と接し，C_2 とも接する直線 l_2 はただ 1 つ存在する。

(2)　$l_1 : x = \dfrac{3}{2}$ ……⑥，③より $l_2 : y = -x - \dfrac{9}{4}$ ……⑦

ここで，C_1 と l_2 の共有点，l_1 と l_2 の共有点，C_1 と l_1 の共有点をそれぞれ P, Q, R とすると，①⑥⑦から，

$$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{15}{4}\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$$



すると，右図の網点部の面積 S は，対称性を利用して，

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{15}{4}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) - 2\int_0^{\frac{3}{2}} -(x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \frac{27}{4} + 2\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

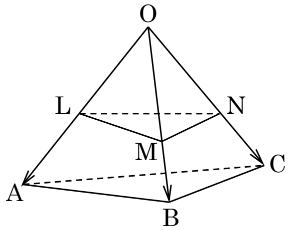
［コメント］

微積分の総合問題です。(2)は 2 点 P, Q が y 軸対称に着目して計算しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

4 点 O, A, B, C が同一平面上にないとき，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ ……(＊)を満たすように 3 点 L, M, N をとる。



(＊)を変形して，$\dfrac{1}{4s}+\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{4u}=1$ となることに着目して，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4s}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\dfrac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\dfrac{3}{4u}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおく。

すると，点 P は平面 LMN 上にあり，しかも，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4s}\cdot s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2t}\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4u}\cdot u\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

これより，点 P は定点である。

したがって，平面 LMN は，s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通る。

［コメント］

空間ベクトルを題材にした問題です。与えられた関係式を係数和が 1 になるように式変形を行っています。