$\boxed{1}$ 解答例のページへ

次の各問いに答えよ。

(1)　i は虚数単位とする。複素数 z が，絶対値が 2 である複素数全体を動くとき，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　次の定積分の値を求めよ。

(i)　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\,dx$　　(ii)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx$

$\boxed{2}$

解答例のページへ

正の整数 x, y, z を用いて，$N = 9z^2 = x^6 + y^4$ と表される正の整数 N の最小値を求めよ。

3

解答例のページへ

e は自然対数の底とする。$x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x)$，$g(x)$ を考える。

$$f(x) = x^2 \log x\,,\ \ g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1 + 2\log x}$$

実数 t は $t > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線に垂直で，点 $(t,\ g(t))$ を通る直線を l_t とする。直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする。t が $\dfrac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ の範囲を動くとき，$p(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 　　解答例のページへ

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L, 直線 OB 上の点 M, 直線 OC 上の点 N を, $\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つようにとる。

(1) s, t, u が $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき, 3 点 L, M, N の定める平面 LMN は, s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ。さらに, そのような点 P はただ 1 つに定まることを示せ。

(2) 四面体 OABC の体積を V とする。(1)における点 P について, 四面体 PABC の体積を V を用いて表せ。

$\boxed{5}$

解答例のページへ

θ は実数とする。xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき，その交点を Q とする。θ が $-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め，その軌跡を xy 平面上に図示せよ。

$\boxed{6}$　　解答例のページへ

n は 2 以上の整数とする。1 枚の硬貨を続けて n 回投げる。このとき，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k = 1$，裏が出たら $X_k = 0$ として，X_1，X_2，$\cdots$，X_n を定める。$Y_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$ とするとき，Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　z が $|z|=2$ である複素数全体を動くとき，$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表すと，

$$z-\frac{i}{z}=2(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$$

$$=2(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{1}{2}(\sin\theta+i\cos\theta)$$

$$=\left(2\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)+i\left(2\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

すると，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|^2=\left(2\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(2\sin\theta-\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)^2$ から，

$$\left|z-\frac{i}{z}\right|^2=4+\frac{1}{4}-2(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)=\frac{17}{4}-2\sin 2\theta$$

θ は任意の実数なので $-1\leqq\sin 2\theta\leqq 1$ から，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{17}{4}+2}=\dfrac{5}{2}$，最小値は $\sqrt{\dfrac{17}{4}-2}=\dfrac{3}{2}$ である。

(2)　(i)　$2x^3+1=(x^2+1)\cdot 2x-(2x-1)$ から，

$$\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x-1}{x^2+1}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$$

ここで，$I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx$ とし，$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\left[\sqrt{x^2+1}+x^2-\log(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=(2-1)+3-\log 4+\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=4-2\log 2+\frac{\pi}{3}$$

(ii)　$\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}}=\dfrac{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}{\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|}$ から，$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx$ とおくと，

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx=\left[-2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log 1\right)=-2\log 2^{-\frac{1}{2}}=\log 2$$

［コメント］

(1)は複素数平面についての基本題です。(2)は定積分の計算題です。(ii)は半角の定理を利用しましたが，他の方法も考えられます。

2

問題のページへ

正の整数 x, y, z を対して，$N = 9z^2 = x^6 + y^4$ ………①

まず，x と x^6，y と y^4 を 3 で割った余りについてまとめると，右表のようになる。これより，x^6，y^4 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

x	0	1	2
x^6	0	1	1

y	0	1	2
y^4	0	1	1

次に，x^6，y^4 を 3 で割った余りと，$x^6 + y^4$ を 3 で割った余りとの関係は右表のようになる。

x^6 \ y^4	0	1
0	0	1
1	1	2

すると，①から $9z^2$ を 3 で割った余りは 0 から，$x^6 + y^4$ を 3 で割った余りも 0，すなわち x^6，y^4 を 3 で割った余りはともに 0 である。

これより，k, l を正の整数として，$x = 3k$，$y = 3l$ とおくことができ，①に代入し，

$$9z^2 = 3^6k^6 + 3^4l^4,\ z^2 = 3^4k^6 + 3^2l^4 = 3^2(3^2k^6 + l^4)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，z^2 は 3^2 の倍数，すなわち z は 3 の倍数となり，m を正の整数として $z = 3m$ とおくと，②から，

$$3^2m^2 = 3^2(3^2k^6 + l^4),\ m^2 = 9k^6 + l^4\ \cdots\cdots\cdots ③$$

③を満たす正の整数 m が最小になるのは，

・$k=1$，$l=1$ のとき　③から，$m^2 = 9+1 = 10$ となり，整数 m は存在しない。

・$k=1$，$l=2$ のとき　③から，$m^2 = 9+16 = 25$ となり，$m = 5$ である。

なお，$k \geqq 2$，$l=1$ のときは，③から $m^2 \geqq 576+1 = 577$ となり，$k=1$，$l=2$ のとき m は最小値をとる。

したがって，①を満たす正の整数 N は $N = 9(3m)^2 = 81m^2$ から，その最小値は，$81\cdot 5^2 = 2025$ である。

［コメント］

誘導のない整数問題です。ここでは，与えられた式の z^2 の係数 9 に着目し，3 で割った余りをもとに考えています。

3

問題のページへ

$x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ における $f(x)=x^2\log x$，$g(x)=x^2\log x-\dfrac{1}{1+2\log x}$ に対して，

$$f'(x)=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\log x+x=x(2\log x+1)>0$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の傾きは，$-\dfrac{1}{f'(t)}=-\dfrac{1}{t(2\log t+1)}$ であり，この法線と平行で点 $(t,\ g(t))$ を通る直線 l_t の方程式は，

$$y-\left(t^2\log t-\frac{1}{1+2\log t}\right)=-\frac{1}{t(2\log t+1)}(x-t)$$

直線 l_t と x 軸の交点の座標が $(p(t),\ 0)$ なので，

$$-\left(t^2\log t-\frac{1}{1+2\log t}\right)=-\frac{1}{t(2\log t+1)}(p(t)-t)$$

$$p(t)-t=t(2\log t+1)\left(t^2\log t-\frac{1}{1+2\log t}\right)=t^3(\log t)(2\log t+1)-t$$

これより，$p(t)=t^3(\log t)(2\log t+1)$ となり，

$$\begin{aligned}p'(t)&=3t^2(\log t)(2\log t+1)+t^3\cdot\frac{1}{t}(2\log t+1)+t^3(\log t)\cdot\frac{2}{t}\\&=3t^2(\log t)(2\log t+1)+t^2(2\log t+1)+2t^2\log t\\&=t^2\{6(\log t)^2+3\log t+2\log t+1+2\log t\}=t^2\{6(\log t)^2+7\log t+1\}\\&=t^2(6\log t+1)(\log t+1)\end{aligned}$$

これより，$\dfrac{1}{\sqrt{e}}<t\leqq e$ すなわち $e^{-\frac{1}{2}}<t\leqq e$ における $p(t)$ の増減は右表のようになり，

t	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{6}}$	$\cdots$	e
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$	0	↘		↗	

$$p(e)=e^3\cdot1\cdot3=3e^3$$

$$p\left(e^{-\frac{1}{6}}\right)=e^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}e^{-\frac{1}{2}}$$

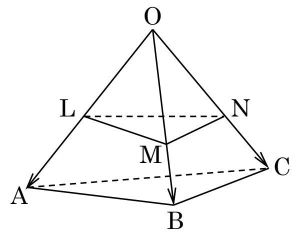
したがって，$p(t)$ のとりうる値の範囲は，$-\dfrac{1}{9}e^{-\frac{1}{2}}\leqq p(t)\leqq 3e^3$ である。

［コメント］

計算量が多めの微分法の問題です。内容は基本的ですが。

4

問題のページへ



(1)　4 点 O, A, B, C が同一平面上にないとき，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$として，$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ ……①を満たすように 3 点 L, M, N をとる。

①を変形して，$\dfrac{1}{4s}+\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{4u}=1$ となることに着目し，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4s}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\dfrac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\dfrac{3}{4u}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおく。

すると，点 P は平面 LMN 上にあり，しかも，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4s}\cdot s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2t}\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4u}\cdot u\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

これより点 P は定点であり，平面 LMN は s, t, u の値に無関係な点 P を通る。

次に，①を満たす s, t, u について，

・$(s,\ t,\ u)=(1,\ 1,\ 3)$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。
　このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ から，点 P は平面 ABC′ 上にある。

・$(s,\ t,\ u)=(-1,\ 1,\ 1)$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおく。
　このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，点 P は平面 A′BC 上にある。

・$(s,\ t,\ u)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ 3\right)$のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。
　このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ から，点 P は平面 A′B′C′ 上にある。

すると，直線 PB は平面 ABC′ と平面 A′BC の交線，直線 PA′ は平面 A′BC と平面 A′B′C′ の交線，直線 PC′ は平面 ABC′ と平面 A′B′C′ の交線である。

そして，3 点 A′，B，C′ は同一直線上にないため，3 交線が一致することはない。これより，3 平面の共有点である点 P はただ 1 つ存在する。

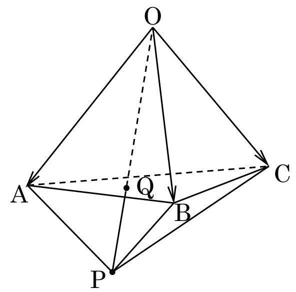
(2)　直線 OP と平面 ABC の交点を Q とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

すると，$\dfrac{k}{4}+\dfrac{k}{2}+\dfrac{3}{4}k=1$ から $\dfrac{3}{2}k=1$ となり，$k=\dfrac{2}{3}$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ なので，$\mathrm{OQ}:\mathrm{PQ}=2:1$ である。

したがって，四面体 OABC の体積を V とするとき，四面体 PABC の体積は$\dfrac{1}{2}V$ となる。



［コメント］

空間ベクトルの問題です。(1)の後半は，感覚的には明らかなのですが……。

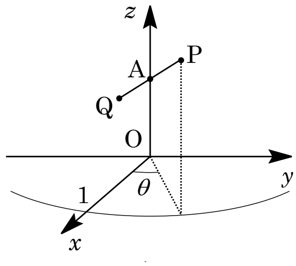
$\boxed{5}$

問題のページへ

点$\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$に対して，直線APは，$t$を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)+t\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

直線APとxy平面の交点を$\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$とすると，



$$\frac{\sqrt{2}}{4}+\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)t=0,\ (2\cos\theta-\sqrt{2})t=-\sqrt{2}$$

$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$のとき，$2\cos\theta-\sqrt{2}>0$なので，

$$t=-\frac{\sqrt{2}}{2\cos\theta-\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta-1}$$

①に代入すると，

$$x=-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-1}\cdots\cdots\cdots②,\ \ y=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-1}\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$x(\sqrt{2}\cos\theta-1)=-\cos\theta$となり，$(\sqrt{2}x+1)\cos\theta=x$から$\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{2}x+1}$

②③から，$\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$なので，$\sin\theta=\dfrac{y}{x}\cos\theta=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{2}x+1}=\dfrac{y}{\sqrt{2}x+1}$となり，

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}x+1}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}x+1}\right)^2=1,\ \ x^2+y^2=2x^2+2\sqrt{2}x+1$$

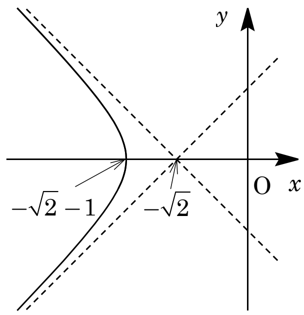
まとめると，$x^2+2\sqrt{2}x-y^2=-1$から，$(x+\sqrt{2})^2-y^2=1\cdots\cdots\cdots④$

さて，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$から$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta\leqq 1$であり，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\dfrac{x}{\sqrt{2}x+1}\leqq 1$より，

- $\sqrt{2}x+1>0\ \left(x>-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき　$\sqrt{2}x+1<\sqrt{2}x\leqq 2x+\sqrt{2}$から成立しない。
- $\sqrt{2}x+1<0\ \left(x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき　$\sqrt{2}x+1>\sqrt{2}x\geqq 2x+\sqrt{2}$から，

$$(2-\sqrt{2})x\leqq-\sqrt{2}$$

$$x\leqq-\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=-\sqrt{2}-1$$



$x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$と合わせて，$x\leqq-\sqrt{2}-1\cdots\cdots⑤$である。

したがって，点Qの軌跡は，④⑤から，

双曲線：$(x+\sqrt{2})^2-y^2=1\ (x\leqq-\sqrt{2}-1)$

図示すると，右図の実線となる。

［コメント］

空間図形と2次曲線の融合問題です。軌跡の限界のチェックがやや面倒です。

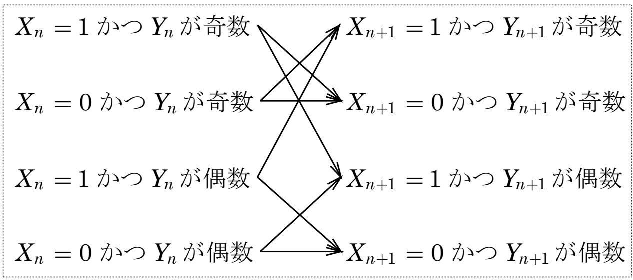
$\boxed{6}$

問題のページへ

1 枚の硬貨を続けて n 回 $(n \geqq 2)$ 投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k = 1$，裏が出たら $X_k = 0$ とし，$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$ とする。

さて，「$X_n = 1$ かつ Y_n が奇数」，「$X_n = 0$ かつ Y_n が奇数」，「$X_n = 1$ かつ Y_n が偶数」，「$X_n = 0$ かつ Y_n が偶数」という確率を，順に a_n，b_n，c_n，d_n とおく。

このとき，状態の推移図は右のようになり，



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}d_n \cdots\cdots ③$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n \cdots\cdots ④$$

なお，$Y_2 = X_1X_2$ から，$a_2 = \frac{1}{4}$，$b_2 = 0$，$c_2 = \frac{1}{4}$，$d_2 = \frac{1}{2}$ である。

ここで，Y_n が奇数である確率を p_n とすると，$p_n = a_n + b_n$ であり，①②より，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + b_n + \frac{1}{2}c_n = b_n + \frac{1}{2}(a_n + c_n) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

①③より，$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n)$

すると，$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ から $a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}$ となり，$a_n + c_n = \frac{1}{2}$ $(n \geqq 3)$

なお，$a_2 + c_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ なので，$n \geqq 2$ で $a_n + c_n = \frac{1}{2}$ となり，⑤に代入して，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = b_n + \frac{1}{4},\quad p_{n+1} = b_n + \frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

また，②から $b_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$ となり，⑥に代入すると $p_{n+2} = b_{n+1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$ から，

$$p_{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \cdots\cdots\cdots ⑦$$

(i)　$n = 2k$ $(k \geqq 1)$ のとき　⑦から，$p_{2k+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_{2k} - \frac{1}{2}\right)$ となり，

$$p_{2k} - \frac{1}{2} = \left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

すると，$p_{2k} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ から，$p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$ となる。

(ii)　$n = 2k+1$ $(k \geqq 1)$ のとき　⑦から，$p_{2k+3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_{2k+1} - \frac{1}{2}\right)$ となり，

$$p_{2k+1} - \frac{1}{2} = \left(p_3 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

すると，$p_{2k+1}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ から，$p_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ となる。

(i)(ii)より，n が偶数のとき $p_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$，$n$ が奇数のとき $p_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ である。

［コメント］

確率と漸化式の問題です。Y_n の偶奇だけでなく，X_n の値にも注意して状態を分類することが必要です。