1

解答例のページへ

t は $0<t<1$ を満たす実数とする。座標平面において，円 $C: x^2+y^2=1$ 上で，y 座標が t であり，さらに第 1 象限にある点 P をとる。点 P における C の接線を l とし，放物線 $y=2-x^2$ と接線 l で囲まれる図形の面積を S とする。t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，S の最小値を求めよ。

2

解答例のページへ

r は正の実数とする。1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA 上に点 P をとる。点 P が辺 OA 上のどこにあっても，点 P を中心とする半径 r の球面が，辺 BC と共有点をもたないような r の範囲を求めよ。ただし，点 O, A は辺 OA に含まれ，点 B, C は辺 BC に含まれるとする。

$\boxed{3}$

解答例のページへ

p は 3 より大きい素数とする。

(1)　$2p$ 以上の整数 N は，0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて，$N=3m+pk$ と表すことができることを示せ。

(2)　0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて，$N=3m+pk$ と表すことができないような 0 以上の整数 N の個数を求めよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

実数 x に対して，$l \leqq x$ を満たす最大の整数 l を $[x]$ で表す。正の整数 n に対して，$a_n = \sum_{k=1}^{n} [\log_3 k]$ と定める。

(1)　a_{26} を求めよ。

(2)　N を正の整数とし，$m = 3^N - 1$ とするとき，a_m を N を用いて表せ。

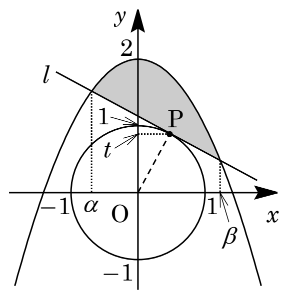
5

解答例のページへ

n は 3 以上の整数とする。1 から n までの番号が書かれた n 枚の札が袋に入っている。ただし，同じ番号が書かれた札はないとする。この袋から 3 枚の札を同時に取り出し，一番大きな番号を X とする。X の期待値を求めよ。

1

問題のページへ



$0<t<1$ のとき，円 $C: x^2+y^2=1$ 上の第 1 象限にある点 $\mathrm{P}(\sqrt{1-t^2},\ t)$ における接線 l の方程式は，

$$\sqrt{1-t^2}\,x+ty=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

放物線 $y=2-x^2 \cdots\cdots ②$ と l の共有点は，①②を連立して，

$$\sqrt{1-t^2}\,x+t(2-x^2)=1$$

$$tx^2-\sqrt{1-t^2}\,x-2t+1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③の判別式を D とすると，

$$D=(1-t^2)-4t(-2t+1)=7t^2-4t+1=7\left(t-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7}>0$$

これより，③の解は，$x=\dfrac{\sqrt{1-t^2}\pm\sqrt{7t^2-4t+1}}{2t}$ となり，この解を $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，放物線②と接線 l で囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{(2-x^2)-\frac{1}{t}\left(1-\sqrt{1-t^2}\,x\right)\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{7t^2-4t+1}}{t}\right)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{7-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+3}\right\}^3$$

すると，$\dfrac{1}{t}>1$ から，$\dfrac{1}{t}=2\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，S は最小値 $\dfrac{1}{6}(\sqrt{3})^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

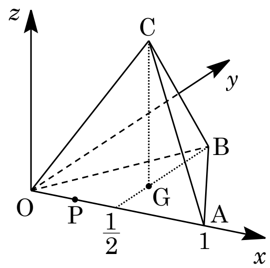
［コメント］

定積分と面積についての基本題です。勢いをつけるための第 1 問となっています。

2

問題のページへ

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$とおく。



△OAB の重心 G は$G\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$となり，$k>0$として，$C\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6},\ k\right)$とおくと，$OC=1$から$\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+k^2}=1$なので，$k^2=\dfrac{2}{3}$より$k=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$となり，$C\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$である。

さて，辺 OA 上の点$P(p,\ 0,\ 0)$ $(0\leqq p\leqq 1)$を中心とする半径$r>0$の球面Sは,

$$(x-p)^2+y^2+z^2=r^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{BC}=\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$から，辺 BC は，$0\leqq t\leqq 1$として，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)+t\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}t$，$z=\dfrac{\sqrt{6}}{3}t$となり，①に代入すると，

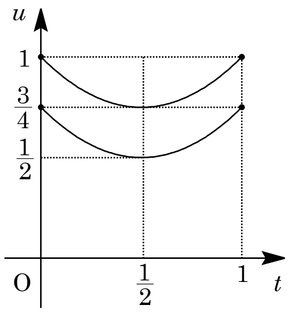
$$\left(\frac{1}{2}-p\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}t\right)^2=r^2,\ \left(\frac{1}{2}-p\right)^2+t^2-t+\frac{3}{4}=r^2\cdots\cdots③$$

点 P が辺 OA 上のどこにあっても，球面Sが辺 BC と共有点をもたない条件は，どんなp $(0\leqq p\leqq 1)$に対しても，③が$0\leqq t\leqq 1$に解をもたないことに対応する。

まず，③より，$\left(\dfrac{1}{2}-p\right)^2=r^2-\left(t^2-t+\dfrac{3}{4}\right)$で，つねに$0\leqq\left(\dfrac{1}{2}-p\right)^2\leqq\dfrac{1}{4}$から，

$$0\leqq r^2-\left(t^2-t+\frac{3}{4}\right)\leqq\frac{1}{4},\ t^2-t+\frac{3}{4}\leqq r^2\leqq t^2-t+1$$

すると，$\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\leqq r^2\leqq\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$を満たす$t$ $(0\leqq t\leqq 1)$が存在しない条件は，右図の$u=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$と$u=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$のグラフを参照すると，



$$0<r^2<\frac{1}{2},\ 1<r^2$$

したがって，$0<r<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$1<r$である。

［コメント］

空間図形の問題で，ねじれの位置にある 2 本の線分の距離の最大値と最小値を求めることが対応します。解答例では，座標を設定して代数的に解きました。

3

問題のページへ

p を 3 より大きい素数, m, k は 0 以上の整数として，$N = 3m + pk$ ………(＊)

(1)　$k = 0,\ 1,\ 2$ のときを調べると,

(i)　$k = 0$ のとき　$N = 3m \geqq 0$ から, N は 0 以上の 3 の倍数である。

(ii)　$k = 1$ のとき　$N = 3m + p \geqq p$ となり，mod 3 で $N \equiv p$ より,

・$p \equiv 1$ のとき　$N \equiv 1$ から, N は 3 で割って 1 余る p 以上の整数である。

・$p \equiv 2$ のとき　$N \equiv 2$ から, N は 3 で割って 2 余る p 以上の整数である。

(iii)　$k = 2$ のとき　$N = 3m + 2p \geqq 2p$ となり，mod 3 で $N \equiv 2p$ より,

・$p \equiv 1$ のとき　$N \equiv 2$ から, N は 3 で割って 2 余る $2p$ 以上の整数である。

・$p \equiv 2$ のとき　$N \equiv 4 \equiv 1$ から, N は 3 で割って 1 余る $2p$ 以上の整数である。

(i)～(iii)より，$2p$ 以上の整数 N は，$p \equiv 1,\ 2$ にかかわらず(＊)で表すことができる。

(2)　0 以上で $2p$ より小さい整数 N は, (＊)から $k \leqq 1$，すなわち $k = 0,\ 1$ となるので,

$$N = 3m,\quad N = 3m + p$$

さて，$p \equiv 1$，$p \equiv 2$ の場合に分けて調べると,

(a)　$p \equiv 1$ のとき　(＊)で表すことができる整数の個数は，$2p \equiv 2$ に注意すると,

・0 以上 $2p$ より小の 3 の倍数の個数　$\dfrac{(2p-2)-0}{3} + 1 = \dfrac{2p+1}{3}$

・p 以上 $2p$ より小の 3 で割って 1 余る整数の個数　$\dfrac{(2p-1)-p}{3} + 1 = \dfrac{p+2}{3}$

これより, (＊)で表すことができる 0 以上 $2p$ より小の N の個数は,

$$\frac{2p+1}{3} + \frac{p+2}{3} = p + 1$$

したがって, (＊)で表すことができない 0 以上 $2p$ より小の N の個数は,

$$2p - (p+1) = p - 1$$

(b)　$p \equiv 2$ のとき　(＊)で表すことができる整数の個数は，$2p \equiv 1$ に注意すると,

・0 以上 $2p$ より小の 3 の倍数の個数　$\dfrac{(2p-1)-0}{3} + 1 = \dfrac{2p+2}{3}$

・p 以上 $2p$ より小の 3 で割って 2 余る整数の個数　$\dfrac{(2p-2)-p}{3} + 1 = \dfrac{p+1}{3}$

これより, (＊)で表すことができる 0 以上 $2p$ より小の N の個数は,

$$\frac{2p+2}{3} + \frac{p+1}{3} = p + 1$$

したがって, (＊)で表すことができない 0 以上 $2p$ より小の N の個数は,

$$2p - (p+1) = p - 1$$

(a)(b)より, (＊)で表すことができない 0 以上 $2p$ より小の N の個数は $p - 1$ である。

すると, (1)の結果から，$2p$ 以上の整数 N はすべて(＊)で表すことができるので, (＊)で表すことができない N の個数は $p - 1$ である。

［コメント］

難度の高い整数と論証の問題で,「a, b が互いに素であるとき, どんな整数 c に対しても $ax+by=c$ を満たす整数 x, y が存在する」という定理がもとになっています。なお, $p=5$ の場合については, ほぼ同じ問題が 2000 年の阪大・理系で出題されています。『2 次数学ランドマーク』の「整数と数列」を参照してください。

4

問題のページへ

(1)　正の整数 k に対して，$\log_3 k$ 以下の最大整数 l を $l=[\log_3 k]$ とすると，

$$l \leqq \log_3 k < l+1,\ \ 3^l \leqq k < 3^{l+1}$$

ここで，$a_{26}=\displaystyle\sum_{k=1}^{26}[\log_3 k]$ について，

・$3^0 \leqq k < 3^1$ $(1 \leqq k < 3)$ のとき　$[\log_3 k]=0$ である。

・$3^1 \leqq k < 3^2$ $(3 \leqq k < 9)$ のとき　$[\log_3 k]=1$ である。

・$3^2 \leqq k < 3^3$ $(9 \leqq k < 27)$ のとき　$[\log_3 k]=2$ である。

これより，$a_{26}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2}[\log_3 k]+\sum_{k=3}^{8}[\log_3 k]+\sum_{k=9}^{26}[\log_3 k]$ より，

$$a_{26}=0\cdot(3-1)+1\cdot(9-3)+2\cdot(27-9)=42$$

(2)　正の整数 N に対し $m=3^N-1$ とし，$a_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{3^N-1}[\log_3 k]$ とする。

ここで，l を 0 以上の整数とすると，$3^l \leqq k < 3^{l+1}$ のとき $[\log_3 k]=l$ であり，

$$\begin{aligned}a_m &= \sum_{k=3^0}^{3^1-1}[\log_3 k]+\sum_{k=3^1}^{3^2-1}[\log_3 k]+\cdots+\sum_{k=3^l}^{3^{l+1}-1}[\log_3 k]+\cdots+\sum_{k=3^{N-1}}^{3^N-1}[\log_3 k]\\ &= 0\cdot(3-1)+1\cdot(9-3)+\cdots+l(3^{l+1}-3^l)+\cdots+(N-1)(3^N-3^{N-1})\\ &= 0\cdot 2+1\cdot 6+\cdots+l(2\cdot 3^l)+\cdots+(N-1)(2\cdot 3^{N-1})=2\sum_{l=0}^{N-1}l\cdot 3^l\end{aligned}$$

さて，$S=\displaystyle\sum_{l=0}^{N-1}l\cdot 3^l$ とおき，$S-3S=-2S$ を計算すると，

$$\begin{aligned}-2S &= 0\cdot 3^0+(3^1+3^2+\cdots+3^{N-1})-(N-1)\cdot 3^N\\ &= \frac{3(3^{N-1}-1)}{3-1}-(N-1)\cdot 3^N=\frac{3^N-3}{2}-(N-1)\cdot 3^N=\left(\frac{3}{2}-N\right)\cdot 3^N-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

すると，$S=\dfrac{1}{2}\left(N-\dfrac{3}{2}\right)\cdot 3^N+\dfrac{3}{4}$ となるので，$a_m=2S=\left(N-\dfrac{3}{2}\right)\cdot 3^N+\dfrac{3}{2}$ である。

［コメント］

ガウス記号の絡んだ数列の和の問題です。最後に，(等差)×(等比)のタイプの和が出現しています。

5

問題のページへ

$n \geqq 3$ で，1 から n までの番号が書かれた n 枚の札が入っている袋から 3 枚を同時に取り出すとき，${}_n\mathrm{C}_3 = \dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 通りが同様に確からしいとする。

このとき，一番大きな番号を X とすると，$X = k\ (3 \leqq k \leqq n)$ となるのは，番号 k の札と $k-1$ 以下の札 2 枚を取り出す場合より，$1 \times {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{1}{2}(k-1)(k-2)$ 通りとなり，

$$P(X = k) = \frac{1 \times {}_{k-1}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_3} = \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

そこで，X の期待値を $E(X)$ とおくと，

$$E(X) = \sum_{k=3}^{n} k \cdot P(X = k) = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$$

$k(k-1)(k-2) = \dfrac{1}{4}\{(k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3)\}$ から，

$$E(X) = \frac{3}{4n(n-1)(n-2)}(n+1)n(n-1)(n-2) = \frac{3}{4}(n+1)$$

［コメント］

期待値についての基本題です。なお，シグマ計算には，階差数列を利用した有名な方法を適用しています。