1

解答解説のページへ

直角三角形に半径 r の円が内接していて，三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

(1) この三角形の斜辺の長さを r で表せ。

(2) r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき，この三角形の面積の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

一辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 BC 上に点 P をとり，線分 BP の長さを x とする。

(1)　三角形 OAP の面積を x で表せ。

(2)　P が辺 BC 上を動くとき三角形 OAP の面積の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ は実数で $a \neq b$, $ab \neq 0$ とする。このとき不等式

$$\frac{x-b}{x+a}-\frac{x-a}{x+b}>\frac{x+a}{x-b}-\frac{x+b}{x-a}$$

を満たす実数 x の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xy 平面上で放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$（$a<b$）をとり，線分 AB と放物線で囲まれた図形の面積を s とする。点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を放物線上にとり，三角形 ABP の面積を $S(\mathrm{P})$ とする。t が $a<t<b$ の範囲を動くときの $S(\mathrm{P})$ の最大値を S とするとき，s と S の比を求めよ。

5

解答解説のページへ

袋の中に青色，赤色，白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている。各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1，2，3 の番号がついている。これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す。取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく，同番号のものも他にない玉の個数を得点とする。たとえば，青 1 番，赤 1 番，白 3 番を取り出したときの得点は 1 で，青 2 番，赤 2 番，赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 得点が n となるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき，$A(0)$，$A(1)$，$A(2)$，$A(3)$ を求めよ。

(2) 得点の期待値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

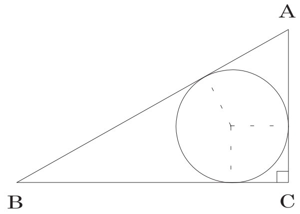
(1)　$\angle C = 90^\circ$ とし，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$ とおくと，

$(a-r)+(b-r)=c$ から，$a+b-c-2r=0$ ………①

条件より，$a+b+c+2r=2$ …………②

②－①より，$2c+4r=2$

よって，$c=1-2r$ …………③



(2)　③を②に代入すると，$a+b=1$ …………④

$\triangle ABC$ の面積を S とし，④と相加平均と相乗平均の関係から，

$$S=\frac{1}{2}ab \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

等号は $a=b$，すなわち④より $a=b=\frac{1}{2}$ のとき成立する。

このとき，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，③より，$r=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ となり，与えられた条件をみたす。これより, S の最大値は $\frac{1}{8}$ である。

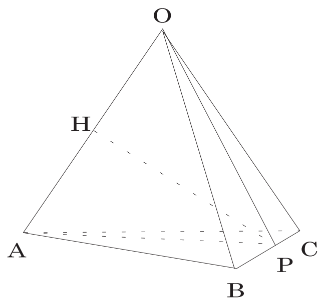
［解 説］

これまで多くの大学でたびたび出題されてきた直角三角形の内接円に関する問題です。なお(2)は，④から $b=1-a$ として S を a だけの 2 次関数として表し，その最大値を求めるという方法でも構いません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　OP = AP より△OAP は二等辺三角形なので,
P から OA に下ろした垂線の足を H とすると,
H は OA の中点となる。



ここで, △OBP に余弦定理を適用して,

$$\mathrm{OP}^2 = 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot\cos 60^\circ = x^2 - x + 1$$

また, P から OA に下ろした垂線の足を H とすると, H は OA の中点より,

$$\mathrm{PH} = \sqrt{x^2 - x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}}$$

△OAP の面積を $S(x)$ とすると,

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 - 4x + 3}$$

(2)　(1)より, $S(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}}$

$0 < x < 1$ から, $x = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $S\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

［解 説］

本年度は範囲外の $\boxed{3}$ を除くと, かなり易しめのセットとなっていますが, そのうちでもこの $\boxed{2}$ は最も基本的です。10 分以内で完答しなくてはいけない問題です。

3

問題のページへ

条件より，$\dfrac{x-b}{x+a}+\dfrac{x+b}{x-a}>\dfrac{x-a}{x+b}+\dfrac{x+a}{x-b}$

$1-\dfrac{a+b}{x+a}+1+\dfrac{a+b}{x-a}>1-\dfrac{a+b}{x+b}+1+\dfrac{a+b}{x-b}$

$-\dfrac{a+b}{x+a}+\dfrac{a+b}{x-a}>-\dfrac{a+b}{x+b}+\dfrac{a+b}{x-b}$…………①

(i) $a+b>0$ のとき

$-\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-a}>-\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x-b}$ より，$\dfrac{a}{(x+a)(x-a)}>\dfrac{b}{(x+b)(x-b)}$

両辺 $\times (x+a)^2(x-a)^2(x+b)^2(x-b)^2$

$a(x+a)(x-a)(x+b)^2(x-b)^2>b(x+a)^2(x-a)^2(x+b)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)\left\{a(x^2-b^2)-b(x^2-a^2)\right\}>0$

$(a-b)(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x^2+ab)>0$…………②

(i-i)　$0<b<a$ のとき

$-a<-b<0<b<a$ となり，$x^2+ab>0$ より，②の解は，

$x<-a$，$-b<x<b$，$a<x$

(i-ii)　$b<0<a$ のとき

$-a<b<0<-b<a$ となり，$-b<a$ から $(-b)^2<a\cdot(-b)<a^2$

よって，$-b<\sqrt{-ab}<a$，また $-a<-\sqrt{-ab}<b$ なので，

$-a<-\sqrt{-ab}<b<0<-b<\sqrt{-ab}<a$ となり，②の解は，

$x<-a$，$-\sqrt{-ab}<x<b$，$-b<x<\sqrt{-ab}$，$a<x$

(i-iii)　$0<a<b$ のとき

(i-i)と同様にして，$-b<-a<0<a<b$ となり，②の解は，

$-b<x<-a$，$a<x<b$

(i-iv)　$a<0<b$ のとき

(i-ii)と同様にして，$-b<-\sqrt{-ab}<a<0<-a<\sqrt{-ab}<b$ となり，②の解は，

$-b<x<-\sqrt{-ab}$，$a<x<-a$，$\sqrt{-ab}<x<b$

(ii)　$a+b=0$ のとき

①の両辺がともに 0 より，解なし。

(iii)　$a+b<0$ のとき

(i)と同様にして，

$(a-b)(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x^2+ab)<0$…………③

(iii-i)　$b<a<0$ のとき

$b<a<0<-a<-b$ となり，③の解は，

$b<x<a$，$-a<x<-b$

(iii-ii)　$b<0<a$ のとき

$b<-\sqrt{-ab}<-a<0<a<\sqrt{-ab}<-b$ となり，③の解は，

$b<x<-\sqrt{-ab}$，$-a<x<a$，$\sqrt{-ab}<x<-b$

(iii-iii) $a<b<0$ のとき

$a<b<0<-b<-a$ となり，③の解は，

$x<a$，$b<x<-b$，$-a<x$

(iii-iv) $a<0<b$ のとき

$a<-\sqrt{-ab}<-b<0<b<\sqrt{-ab}<-a$ となり，③の解は，

$x<a$，$-\sqrt{-ab}<x<-b$，$b<x<\sqrt{-ab}$，$-a<x$

以上まとめると，

(i-i)と(iii-iii)から，$ab>0$，$|a|>|b|$ のとき

$x<-|a|$，$-|b|<x<|b|$，$|a|<x$

(i-ii)と(iii-iv)から，$ab<0$，$|a|>|b|$ のとき

$x<-|a|$，$-\sqrt{-ab}<x<-|b|$，$|b|<x<\sqrt{-ab}$，$|a|<x$

(i-iii)と(iii-i)から，$ab>0$，$|a|<|b|$ のとき

$-|b|<x<-|a|$，$|a|<x<|b|$

(i-iv)と(iii-ii)から，$ab<0$，$|a|<|b|$ のとき

$-|b|<x<-\sqrt{-ab}$，$-|a|<x<|a|$，$\sqrt{-ab}<x<|b|$

(ii)から，$a=-b$ のとき

解なし

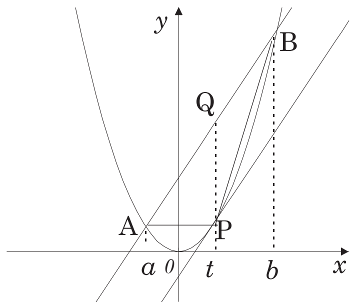
［解 説］

どのようにみても，数学Ⅲの範囲の問題です。現行課程の標準的カリキュラムの拡充を意図した出題かも知れません。同じようなことはセンター追試験でも起こりました。数学Ⅱ・数学Ｂの第 3 問において，分数関数のとりうる値の範囲を求める問題が出たことです。このように指定された入試科目の範囲外と考えられる問題が，昨年度も確率などで少々出ましたが，本年度は非常によく目につくようになりました。受験生の立場からすると，ありがたくない規制緩和ですが。

なお，本問は範囲外ということも考慮して，上の解では場合分けを細かくして「くどく」書いてみました。

$\boxed{4}$

問題のページへ



$y=x^2$ より $y'=2x$ なので, P における接線の傾きは $2t$ となる。

線分 AB の傾きは, $\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b$ である。

ここで, $S(\mathrm{P})$ が最大となるのは, P における接線の傾きと線分 AB の傾きとが等しいときより,

$$2t=a+b,\ \ t=\frac{a+b}{2}$$

このとき, $\mathrm{P}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right)$ となる。

さて, P を通り y 軸に平行な直線と線分 AB との交点を Q とすると, 点 Q は線分 AB の中点となるので, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$ と表される。

以上より,

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}(b-a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-2ab}{4}(b-a)=\frac{1}{8}(b-a)^3$$

また, 線分 AB と放物線で囲まれた面積は,

$$s=\int_a^b-(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

よって, $s:S=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{8}=4:3$

［解 説］

$\boxed{1}$ と同じく, 頻出有名問題です。上のように接線の傾きに着目する解法がベストですが, 普通に $S(\mathrm{P})$ を立式して最大値を求めても, 時間が不足するということはないでしょう。完答しなくてはいけない問題です。

5

問題のページへ

(1)　取り出した 3 個の玉について，異なる色の種類数と異なる番号の個数，および得点との関係をまとめると，右表のようになる。

色の数	1	2	2	3	3	3
番号の数	3	2	3	1	2	3
得　点	0	0	1	0	1	3

(i)得点が 3 点となるとき

3 色すべてを取り出し，しかも 3 つの番号をすべて取り出す場合より，

$$A(3)=3!=6$$

(ii)　得点が 2 点となるとき

この場合は存在しないので，$A(2)=0$

(iii) 得点が 1 点となるとき

3 色で番号 2 種類のときは，番号の組合せが 3 通りで，それぞれの場合に対して色の対応が 2×3＝6 通りずつある。よって, 3×6＝18 通りとなる。

2 色で番号 3 種類のときも，同様にして 18 通りとなる。

合わせて，$A(1)=18\times 2=36$

(iv) 得点が 0 点となるとき

3 個の玉を取り出すすべての場合の数は，${}_9\mathrm{C}_3=84$ 通りなので, (i)(ii)(iii)より，

$$A(0)=84-(6+0+36)=42$$

(2)　得点の期待値は, (1)より

$$3\times\frac{6}{84}+2\times 0+1\times\frac{36}{84}+0\times\frac{42}{84}=\frac{9}{14}$$

［解 説］

確率の問題では，考えていることを整理するために，表が役に立ちます。表を書くとミスが少なくなってきます。なお，(1)の $A(0)$ の値は，次のようにすれば直接的に導くことができます。色数 1，番号数 3 の場合は 3 通り。色数 3，番号数 1 の場合も 3 通り。また色数 2，番号数 2 の場合は，色の選び方が 3 通り，番号の選び方が 3 通り，それぞれの場合に対して色と番号の対応が 2×2＝4 通りずつとなり，よって 3×3×4＝36 通り。以上より，$A(0)=3+3+36=42$ となります。