$\boxed{1}$

解答解説のページへ

直角三角形に半径 r の円が内接していて，三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　この三角形の斜辺の長さを r で表せ。

(2)　r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき，この三角形の面積の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$f(x)=x^2+7$ とおく。

(1) n は 3 以上の自然数で，ある自然数 a に対して $f(a)$ は 2^n の倍数になっているとする。このとき $f(a)$ と $f(a+2^{n-1})$ のうち少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数であることを示せ。

(2) 任意の自然数 n に対して $f(a_n)$ が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在することを示せ。

3

解答解説のページへ

四面体 OABC の辺 OA 上に点 P, 辺 AB 上に点 Q, 辺 BC 上に点 R, 辺 CO 上に点 S をとる。これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき, この平行四辺形 PQRS の 2 つの対角線の交点は 2 つの線分 AC と OB のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

a, m は自然数で a は定数とする。xy 平面上の点$(a,\ m)$を頂点とし，原点と点$(2a,\ 0)$を通る放物線を考える。この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積をS_m，この領域の内部および境界線上にある格子点の数をL_mとする。このとき極限値

$$\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$$

を求めよ。ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである。

5

解答解説のページへ

袋の中に青色, 赤色, 白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている。各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1, 2, 3 の番号がついている。これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す。取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく, 同番号のものも他にない玉の個数を得点とする。たとえば, 青 1 番, 赤 1 番, 白 3 番を取り出したときの得点は 1 で, 青 2 番, 赤 2 番, 赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 得点が n となるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき, $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ を求めよ。

(2) 得点の期待値を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

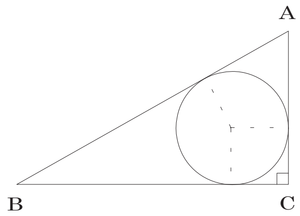
a を $0<a<1$ を満たす定数として，曲線 $y=\log(x-a)$ と x 軸と 2 直線 $x=1$，$x=3$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする。

(1)　$V(a)$ を求めよ。

(2)　a の値が $0<a<1$ の範囲で変化するとき，$V(a)$ の最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\angle C = 90°$ とし，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$ とおくと，

$(a - r) + (b - r) = c$ から，$a + b - c - 2r = 0$ ………①

条件より，$a + b + c + 2r = 2$ …………②

②−①より，$2c + 4r = 2$

よって，$c = 1 - 2r$ …………③

(2)　③を②に代入すると，$a + b = 1$ …………④

△ABC の面積を S とし，④と相加平均と相乗平均の関係から，

$$S = \frac{1}{2}ab \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

等号は $a = b$，すなわち④より $a = b = \dfrac{1}{2}$ のとき成立する。

このとき，$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，③より，$r = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$ となり，与えられた条件をみたす。これより, S の最大値は $\dfrac{1}{8}$ である。

［解 説］

これまで多くの大学でたびたび出題されてきた直角三角形の内接円に関する問題です。なお(2)は，④から $b = 1 - a$ として S を a だけの 2 次関数として表し，その最大値を求めるという方法でも構いません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$f(a)=a^2+7=k\cdot 2^n$（k は自然数）………①とおくと，

$f(a+2^{n-1})=(a+2^{n-1})^2+7=a^2+a\cdot 2^n+2^{2n-2}+7$

①より，$f(a+2^{n-1})=k\cdot 2^n+a\cdot 2^n+2^{2n-2}$………②

(i)k が偶数（$k=2l,\ l\geqq 1$）のとき

①より，$f(a)=2l\cdot 2^n=l\cdot 2^{n+1}$ となり，$f(a)$ は 2^{n+1} の倍数となる。

(ii)　k が奇数（$k=2l-1,\ l\geqq 1$）のとき

②より，
$$
\begin{aligned}
f(a+2^{n-1})&=(2l-1)\cdot 2^n+a\cdot 2^n+2^{2n-2}\\
&=l\cdot 2^{n+1}+(a-1)\cdot 2^n+2^{n-3}\cdot 2^{n+1}\\
&=\left(l+\frac{a-1}{2}+2^{n-3}\right)\cdot 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

ここで，①より a^2 は奇数なので a も奇数となり，$\dfrac{a-1}{2}$ は整数となる。

また条件より，$n\geqq 3$ から $2^{n-3}\geqq 2^0=1$ となる。

すると，$l+\dfrac{a-1}{2}+2^{n-3}$ は整数である。

よって，$f(a+2^{n-1})$ は 2^{n+1} の倍数となる。

(i)(ii)より，$f(a)$ と $f(a+2^{n-1})$ の少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数となる。

(2)　題意成立を数学的帰納法によって証明する。

(i)$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$f(a_1)={a_1}^2+7=k_1\cdot 2^1$ とすると，$a_1=1,\ k_1=4$ で成立。

$f(a_2)={a_2}^2+7=k_2\cdot 2^2$ とすると，$a_2=1,\ k_2=2$ で成立。

$f(a_3)={a_3}^2+7=k_3\cdot 2^3$ とすると，$a_3=1,\ k_3=1$ で成立。

(ii)　$n=m$ のとき

$f(a_m)={a_m}^2+7=k_m\cdot 2^m$（$k_m$ は自然数）となる自然数 a_m が存在すると仮定。

(1)より，$f(a_m)$ と $f(a_m+2^{m-1})$ の少なくとも一方は 2^{m+1} の倍数となるので，

$a_{m+1}=a_m$ または $a_{m+1}=a_m+2^{m-1}$ とすると，題意が成立する。

(i)(ii)より，$f(a_n)$ が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在する。

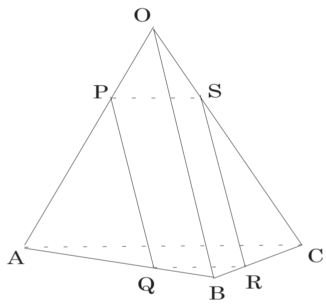
［解　説］

京大特有の整数問題です。(2)の命題には一瞬驚かされますが，(1)の利用という視点で考えれば，n に関する帰納法とすぐにつかむことができます。この点，昨年度の２番の整数問題と比べると，とても扱いやすいという気がします。

$\boxed{3}$

問題のページへ

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。



$0<p<1$, $0<q<1$, $0<r<1$, $0<s<1$ として,
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\vec{a}+(1-q)\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-r)\vec{b}+r\vec{c}$,
$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\vec{c}$ とおく。

ここで，四角形 PQRS が平行四辺形より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$

$$(q-p)\vec{a}+(1-q)\vec{b}=(1-r)\vec{b}+(r-s)\vec{c}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次独立より

$$q-p=0 \text{ かつ } 1-q=1-r \text{ かつ } r-s=0$$

よって，$p=q=r=s$ ………①

このとき平行四辺形 PQRS の 2 つの対角線の交点を T とすると，T は PR の中点より，①を用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{2}=\frac{p\vec{a}+(1-p)\vec{b}+p\vec{c}}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

AC, OB の中点をそれぞれ M, N とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\vec{b}}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=p\cdot\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+(1-p)\cdot\frac{\vec{b}}{2}=p\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-p)\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

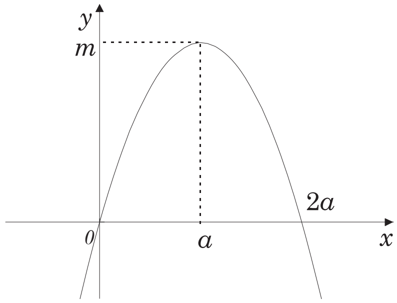
$0<p<1$ から T は線分 MN 上にある。

［解 説］

証明の方針に迷いが生じることはない頻出問題の 1 つです。完答が要求される設問です。

4

問題のページへ



放物線の方程式を $y=f(x)$ とすると，原点と点 $(2a,\ 0)$ を通ることより，$f(x)=kx(x-2a)$ とおける。

頂点が $(a,\ m)$ なので，$m=f(a)$ から，$k=-\dfrac{m}{a^2}$ となる。

よって，$f(x)=-\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$

すると，$S_m=\displaystyle\int_0^{2a}-\frac{m}{a^2}x(x-2a)\,dx=-\frac{m}{a^2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(2a)^3=\frac{4}{3}am$

また，$x=k\ (0\leqq k\leqq 2a)$ 上の格子点の個数を N_k とおくと，

$N_k=[\,f(k)\,]+1$（$[\,x\,]$ は x の整数部分を表す）

$f(k)<N_k\leqq f(k)+1$

$L_m=\displaystyle\sum_{k=0}^{2a}N_k$ から，$\displaystyle\sum_{k=0}^{2a}f(k)<L_m\leqq\sum_{k=0}^{2a}\{\,f(k)+1\,\}$

$$\sum_{k=0}^{2a}f(k)=-\frac{m}{a^2}\sum_{k=0}^{2a}(k^2-2ak)$$
$$=-\frac{m}{a^2}\cdot\left\{\frac{1}{6}\cdot 2a(2a+1)(4a+1)-2a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a(2a+1)\right\}$$
$$=-\frac{m}{a^2}\cdot\frac{a(2a+1)}{3}(4a+1-6a)=\frac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}$$

$$\sum_{k=0}^{2a}\{\,f(k)+1\,\}=\frac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}+(2a+1)$$

$$\frac{\dfrac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}}{\dfrac{4}{3}am}<\frac{L_m}{S_m}\leqq\frac{\dfrac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}+(2a+1)}{\dfrac{4}{3}am}$$ より，

$$\frac{(2a+1)(2a-1)}{4a^2}<\frac{L_m}{S_m}\leqq\frac{(2a+1)(2a-1)}{4a^2}+\frac{3(2a+1)}{4am}$$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}=\frac{(2a+1)(2a-1)}{4a^2}$

［解 説］

ガウス記号を用いて処理すると，明快に解を書くことができます。もっとも本問では，m が無限大の状態を考えるわけですから，$N_k=f(k)$ としても，その誤差は，せいぜい $2a+1$ ですので積もらない塵のようなものです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) 取り出した3個の玉について，異なる色の種類数と異なる番号の個数，および得点との関係をまとめると，右表のようになる。

色の数	1	2	2	3	3	3
番号の数	3	2	3	1	2	3
得　点	0	0	1	0	1	3

(i)得点が3点となるとき

3色すべてを取り出し，しかも3つの番号をすべて取り出す場合より，

$$A(3)=3!=6$$

(ii) 得点が2点となるとき

この場合は存在しないので，$A(2)=0$

(iii) 得点が1点となるとき

3色で番号2種類のときは，番号の組合せが3通りで，それぞれの場合に対して色の対応が$2\times3=6$通りずつある。よって, $3\times6=18$通りとなる。

2色で番号3種類のときも，同様にして18通りとなる。

合わせて，$A(1)=18\times2=36$

(iv) 得点が0点となるとき

3個の玉を取り出すすべての場合の数は，${}_9\mathrm{C}_3=84$通りなので, (i)(ii)(iii)より，

$$A(0)=84-(6+0+36)=42$$

(2) 得点の期待値は, (1)より

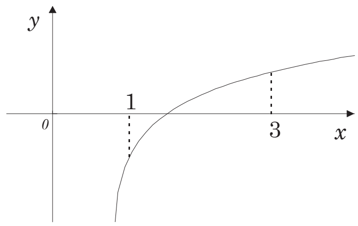
$$3\times\frac{6}{84}+2\times0+1\times\frac{36}{84}+0\times\frac{42}{84}=\frac{9}{14}$$

［解 説］

確率の問題では，考えていることを整理するために，表が役に立ちます。表を書くとミスが少なくなってきます。なお, (1)の$A(0)$の値は，次のようにすれば直接的に導くことができます。色数1，番号数3の場合は3通り。色数3，番号数1の場合も3通り。また色数2，番号数2の場合は，色の選び方が3通り，番号の選び方が3通り，それぞれの場合に対して色と番号の対応が$2\times2=4$通りずつとなり，よって$3\times3\times4=36$通り。以上より，$A(0)=3+3+36=42$となります。

$\boxed{6}$

問題のページへ



(1) $V(a)=\int_1^3 \pi(\log(x-a))^2 dx$

$=\pi\int_{1-a}^{3-a}(\log t)^2 dt$ （$x-a=t$ とおく）

$=\pi\left\{\left[t(\log t)^2\right]_{1-a}^{3-a}-\int_{1-a}^{3-a} t\cdot 2\log t\cdot\frac{1}{t}dt\right\}$

$=\pi\left\{(3-a)(\log(3-a))^2-(1-a)(\log(1-a))^2-2\left[t\log t-t\right]_{1-a}^{3-a}\right\}$

$=\pi\left\{(3-a)(\log(3-a))^2-(1-a)(\log(1-a))^2\right\}$

$-2\pi\{(3-a)\log(3-a)-(1-a)\log(1-a)-2\}$

(2) $\dfrac{V(a)}{\pi}=f(a)$ とおいて，

$f'(a)=-(\log(3-a))^2-2\log(3-a)+(\log(1-a))^2+2\log(1-a)$

$+2\log(3-a)+2-2\log(1-a)-2$

$=(\log(1-a))^2-(\log(3-a))^2$

$=(\log(1-a)+\log(3-a))(\log(1-a)-\log(3-a))$

$0<a<1$ より，$\log(1-a)<0$，$\log(3-a)>0$ なので，$\log(1-a)-\log(3-a)<0$

ここで，$\log(1-a)+\log(3-a)>0$ とすると，$(1-a)(3-a)>1$

$a^2-4a+2>0$ から，$a<2-\sqrt{2}$

$f(a)$ の増減は右表のようになり，$a=2-\sqrt{2}$ のとき $f(a)$ は最小，すなわち $V(a)$ は最小となる。

a	0	……	$2-\sqrt{2}$	……	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘		↗	

このとき，$3-a=1+\sqrt{2}$，$1-a=-1+\sqrt{2}$ より，

$V(2-\sqrt{2})=\pi\left\{(1+\sqrt{2})(\log(1+\sqrt{2}))^2-(-1+\sqrt{2})(\log(-1+\sqrt{2}))^2\right\}$

$-2\pi\left\{(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})-(-1+\sqrt{2})\log(-1+\sqrt{2})-2\right\}$

ここで，$-1+\sqrt{2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ より，$\log(-1+\sqrt{2})=-\log(1+\sqrt{2})$ なので，

$V(2-\sqrt{2})=\pi\left\{2(\log(1+\sqrt{2}))^2-4\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})+4\right\}$

$=2\pi\left\{\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}\right\}^2$

［解 説］

(1)(2)とも，丁寧に計算していけば完答できる問題です。(1)の結論はあまりきれいな形ではありませんが，(2)の計算のためにそのままにしておきました。なお，(2)の方は上のようにまとめないといけないでしょう。