1

解答解説のページへ

鋭角三角形△ABC において，辺 BC の中点を M，A から BC にひいた垂線を AH とする。点 P を線分 MH 上にとるとき，

$$AB^2+AC^2 \geqq 2AP^2+BP^2+CP^2$$

となることを示せ。

2

解答解説のページへ

放物線$y = x^2$の上を動く 2 点 P，Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき, PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする。たとえば，$C(12578)=78$，$C(6)=6$ である。n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

(1) x，y が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ ならば，$C(x)=C(y)$ であることを示せ。

(2) $C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ。

4

解答解説のページへ

相異なる 4 つの複素数 z_1，z_2，z_3，z_4 に対して,

$$w=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

とおく。このとき, 以下を証明せよ。

(1)　複素数 z が単位円上にあるための必要十分条件は, $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ である。

(2)　z_1，z_2，z_3，z_4 が単位円上にあるとき, w は実数である。

(3)　z_1，z_2，z_3 が単位円上にあり, w が実数であれば, z_4 は単位円上にある。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

n, k は自然数で, $n \geqq 3$, $k \geqq 2$ を満たすものとする。いま, n 角柱の $n+2$ 個の面に 1 から $n+2$ までの番号が書いてあるものとする。この $n+2$ 個の面に 1 面ずつ, 異なる k 色の中から 1 色ずつ選んでは塗っていく。このとき, どの隣り合う面の組も同一色では塗られない塗り方の数を P_k で表す。

(1)　P_2 と P_3 を求めよ。

(2)　$n=7$ のとき, P_4 を求めよ。

1

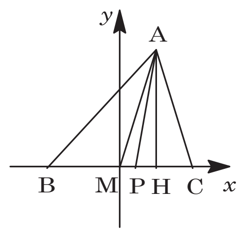
問題のページへ

Mを原点とし，A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$をおく。

このとき, $a>0$, $b>0$, $c>0$としても一般性は失われない。

また，△ABCが鋭角三角形より$0<a<c$となる。

するとH$(a,\ 0)$となることから，P$(p,\ 0)$とおくと，



条件より$0\leqq p\leqq a$となる。

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2$$
$$2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=2\left\{(a-p)^2+b^2\right\}+(p+c)^2+(c-p)^2$$
$$=2a^2+2b^2+4p^2+2c^2-4ap$$

ここで，$0\leqq p\leqq a$より，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-(2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)=-4p^2+4ap=4p(a-p)\geqq 0$$

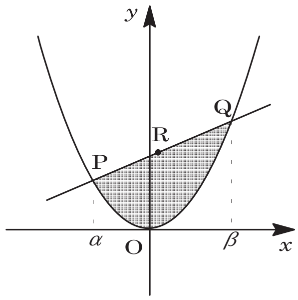
よって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\geqq 2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$

［解 説］

ベクトルを利用しようか，座標を用いようかと迷いましたが，後者で解を作りました。中線定理の証明と同じように座標系を設定すると，簡単に示せました。

$\boxed{2}$

問題のページへ



$P(\alpha,\ \alpha^2)$，$Q(\beta,\ \beta^2)$（$\alpha<\beta$）とするとき，放物線 $y=x^2$ と線分 PQ が囲む部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

条件より，$\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=1$，$(\beta-\alpha)^3=6$

$$\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}=6\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$R(x,\ y)$ とすると，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$\alpha+\beta=2x\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\alpha\beta=-y+\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2}=-y+2x^2\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入して，

$$(4y-4x^2)^{\frac{3}{2}}=6,\quad y=x^2+\frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

［解 説］

数Ⅱの微積分の典型問題です。途中の式変形も難しいところはありませんでした。なお，①より α，β が実数という条件は満たされています。

3

問題のページへ

(1)　$C(x)$ は x を 100 で割った余りなので，$C(nx)=C(ny)$ より，$nx-ny$ は 100 の倍数となる。すると, k を整数として,

$$n(x-y)=100k$$

n は 2 でも 5 でも割り切れない正の整数なので，n と $100=2^2\cdot5^2$ は互いに素である。

よって，$x-y$ が 100 の倍数となり，$C(x)=C(y)$ が成立する。

(2)　(1)の命題の対偶をとると,

$C(x)\neq C(y)$ ならば，$C(nx)\neq C(ny)$ ………①

ここで，$C(x)=r_x$，$C(y)=r_y$ とおくと, p, q を 0 以上の整数として,

$$x=100p+r_x,\quad y=100q+r_y$$

$$nx=100np+nr_x,\quad ny=100nq+nr_y$$

命題①は整数 r_x，r_y（$0\leqq r_x\leqq99$，$0\leqq r_y\leqq99$）に対し,

$r_x\neq r_y$ ならば，$C(nr_x)\neq C(nr_y)$ ………②

すると，命題②より $C(0)$，$C(n)$，$C(2n)$，$C(3n)$, …… , $C(99n)$ はすべて異なり，しかも題意から 0, 1, 2, 3, ……, 99 のいずれかである。

よって，$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在する。

［解 説］

整数 a, b が互いに素であるとき，$ax+by=1$ を満たす整数 x, y が存在するという定理がありますが，(2)はこの定理の具体的な場合の証明となっています。しかし，上の解の論法は，たとえ(1)の誘導がついたとしても，参考書などで類題を経験しておかないと無理でしょう。たとえば，いま手元にあるものでは『1 対 1 対応の演習数学 I A』(東京出版)の 163 ページの例題が同じ内容となっています。

4

問題のページへ

(1) 点 z が単位円上にある条件は,

$$|z|=1 \iff |z|^2=1 \iff z\overline{z}=1 \iff \overline{z}=\frac{1}{z}$$

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 が単位円上にあるので, (1)より,

$$\overline{z_1}=\frac{1}{z_1},\ \overline{z_2}=\frac{1}{z_2},\ \overline{z_3}=\frac{1}{z_3},\ \overline{z_4}=\frac{1}{z_4}$$

ここで, $\overline{w}=\dfrac{(\overline{z_1}-\overline{z_3})(\overline{z_2}-\overline{z_4})}{(\overline{z_1}-\overline{z_4})(\overline{z_2}-\overline{z_3})}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_4}\right)}{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_4}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)}=\dfrac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}$

よって, $w=\overline{w}$ となるので, w は実数となる。

(3) (2)と同様にして, $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$, $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$, $\overline{z_3}=\dfrac{1}{z_3}$

ここで, $|z_4|=k$ とおくと, $z_4\overline{z_4}=k^2$

(i) $k=0$ のとき

$z_4=0$ なので, $w=\dfrac{z_2(z_1-z_3)}{z_1(z_2-z_3)}$ となり, $\overline{w}=\dfrac{\dfrac{1}{z_2}\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)}{\dfrac{1}{z_1}\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)}=\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$

$w=\overline{w}$ より, $\dfrac{z_2(z_1-z_3)}{z_1(z_2-z_3)}=\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ となるが, $z_2\neq z_1$ より不成立。

(ii) $k>0$ のとき

$\overline{z_4}=\dfrac{k^2}{z_4}$ となり, (2)と同様に変形すると,

$$\overline{w}=\frac{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{k^2}{z_4}\right)}{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{k^2}{z_4}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)}=\frac{(z_3-z_1)(z_4-k^2z_2)}{(z_4-k^2z_1)(z_3-z_2)}$$

$w=\overline{w}$ より, $\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\dfrac{(z_3-z_1)(z_4-k^2z_2)}{(z_4-k^2z_1)(z_3-z_2)}$

$$(z_2-z_4)(z_4-k^2z_1)=(z_1-z_4)(z_4-k^2z_2)$$

まとめて, $(k^2-1)z_4(z_1-z_2)=0$

$z_4\neq 0$, $z_2\neq z_1$ より, $k^2=1$, $k=1$

よって, $|z_4|=1$ から点 z_4 は単位円上にある。

[解 説]

(1)の誘導で, 共役複素数の利用という方針が示されています。それに従えば, (2), (3)はスムーズに証明できます。

5

問題のページへ

(1)　側面を 1 番から n 番とし，底面を$n+1$番，$n+2$番とする。このとき，$n+1$番の面と 1 番の面, 2 番の面は異なる色である。

2 色のときは塗り分けることができないので，$P_2=0$となる。

3 色のとき，$n+1$番の面と 1 番の面，2 番の面は異なる色に塗ることより，底面の$n+2$番と$n+1$番の面は同じ色となる。また側面の奇数番の面は 1 番の面と同じ色，偶数番の面は 2 番の面と同じ色となる。

さらに, n 番の面と 1 番の面は異なる色でなくてはならないので, n が奇数のときは$P_3=0$, n が偶数のときは$P_3=3\times2\times1=6$となる。

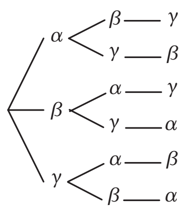
(2)　(i)　底面の 8 番, 9 番の面を異なる色で塗るとき

1 番から 7 番までの側面は残りの 2 色で塗り分けなくてはならないが，$n=7$は奇数なので, (1)より塗り分ける方法はない。

(ii)　底面の 8 番, 9 番の面を同じ色で塗るとき

1 番から 7 番までの側面は残りの 3 色で塗り分けることになる。

ここで一般的に, 3 色以下の色で 1 番の面から塗り分けていき, n 番と 1 番の面が異なる色の塗り方をa_n通り, n 番と 1 番の面が同じ色の塗り方をb_n通りとする。なお，色をα，β，γ とすると，右の樹形図より$a_3=6$となる。



1 番から n 番までの面の塗り分け方は$3\times2^{n-1}$通りより,

$$a_n+b_n=3\cdot2^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，n 番と 1 番の面に異なる色を塗るには，$n-1$番と 1 番の面が異なる色のときは n 番にこの 2 色以外の 1 色を塗り，$n-1$番と 1 番の面が同じ色のときは n 番にこの色以外の 2 色のいずれか一方を塗ればよいので,

$$a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a_n=a_{n-1}+2(-a_{n-1}+3\cdot2^{n-2})=-a_{n-1}+3\cdot2^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$

③より$a_4=-a_3+3\cdot2^3=18$, 同様にして$a_5=30$，$a_6=66$，$a_7=126$

このとき，(i)より側面を 2 色で塗り分けることは不可能なので，側面を 3 色で塗り分ける方法は 126 通りとなる。

底面の塗り方は 4 通りより，$P_4=4\times126=504$となる。

［解 説］

(2)は，$n=7$なので樹形図だけで解決ということもできますが，ちょっと気乗りがしませんでした。そのため，漸化式を利用して一般的に解いてみました。