

1

[解答解説のページへ](#)

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき、 PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。

2

[解答解説のページへ](#)

平面上に 2 定点 A, B をとる。 c は正の定数として、平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$$

を満たすとき、点 P の軌跡を求めよ。

3

解答解説のページへ

- (1) $a_0 < b_0$, $a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0 , b_0 , a_1 , b_1 について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{b_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{a_1^2}{b_0^2 + 1} > \frac{a_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{b_1^2}{b_0^2 + 1}$$

- (2) n 個の自然数 x_1, x_2, \dots, x_n は互いに相異なり、 $1 \leq x_k \leq n$ ($1 \leq k \leq n$) を満たしているとする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1} > n - \frac{8}{5}$$

4

解答解説のページへ

複素平面上で、 $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数を α, β, γ とする。 α, β, γ が次の 3 条件を満たすとする。

1. $\triangle ABC$ は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である
2. $\alpha + \beta + \gamma = 3$
3. $\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で、虚数部分は正

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $z = \alpha - 1$ とおいて、 β と γ を z を使って表せ。
- (2) α, β, γ の偏角を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \arg \alpha \leq \arg \beta \leq \arg \gamma < 360^\circ$ とする。

5

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。ただし、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい。

- (1) 有理数 p, q, r について、 $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$ ならば、 $p = q = r = 0$ であることを示せ。
- (2) 実数係数の 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ について、 $f(1)$ 、 $f(1 + \sqrt{2})$ 、 $f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ。

6

解答解説のページへ

x, y は t を媒介変数として、次のように表示されているものとする。

$$x = \frac{3t - t^2}{t+1}, \quad y = \frac{3t^2 - t^3}{t+1}$$

変数 t が $0 \leq t \leq 3$ を動くとき、 x と y の動く範囲をそれぞれ求めよ。さらに、この (x, y) が描くグラフが囲む図形と領域 $y \geq x$ の共通部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

$P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$) とするとき、
放物線 $y = x^2$ と線分 PQ が囲む部分の面積 S は、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} -(x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

条件より、 $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = 1$, $(\beta - \alpha)^3 = 6$

$$\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $R(x, y)$ とすると、

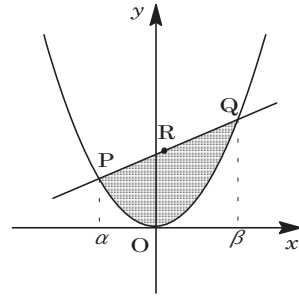
$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より, } \alpha + \beta = 2x \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より, } \alpha\beta = -y + \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} = -y + 2x^2 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}\textcircled{5}$ を $\textcircled{1}$ に代入して、

$$(4y - 4x^2)^{\frac{3}{2}} = 6, \quad y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$



[解説]

数Ⅱの微積分の典型問題です。途中の式変形も難しいところはありませんでした。
なお、 $\textcircled{1}$ より α, β が実数という条件は満たされています。

2

問題のページへ

$\triangle ABP$ に余弦定理を適用して,

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - 2\overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - |\overline{AB}|^2}{2} \dots\dots\dots ①$$

なお, ①は 3 点 P, A, B が同一直線上にあるときも成立する。

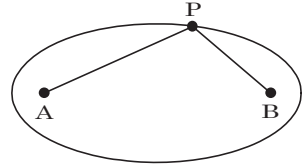
$$\text{条件より, } |\overline{PA}| + |\overline{PB}| + \overline{PA} \cdot \overline{PB} = c \dots\dots\dots ②$$

①を②に代入して,

$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + \frac{|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - |\overline{AB}|^2}{2} = c$$

$$\left(|\overline{PA}| + |\overline{PB}| \right)^2 = 2c + |\overline{AB}|^2$$

$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| = \sqrt{2c + |\overline{AB}|^2} \dots\dots\dots ③$$



$\sqrt{2c + |\overline{AB}|^2}$ は定数なので, ③より点 P は 2 点 A, B を焦点とする楕円を描く。

長軸の長さは $\sqrt{2c + |\overline{AB}|^2}$, 短軸の長さは $2\sqrt{\frac{1}{4}(2c + |\overline{AB}|^2) - \frac{1}{4}|\overline{AB}|^2} = \sqrt{2c}$ となる。

[解説]

2 点 A, B の中点を原点として座標設定しようかと思いましたが, 条件式②の形に注目して, ベクトルの大きさと内積を余弦定理で関連づけてみました。すると, 楕円の定義式が導けました。

3

問題のページへ

$$(1) \frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} - \frac{a_1^2}{a_0^2+1} - \frac{b_1^2}{b_0^2+1} = \frac{b_1^2 - a_1^2}{a_0^2+1} - \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_0^2+1}$$

$$= \frac{(b_1^2 - a_1^2)(b_0^2 - a_0^2)}{(a_0^2+1)(b_0^2+1)}$$

$$0 < a_0 < b_0, 0 < a_1 < b_1 \text{ より, } \frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} > \frac{a_1^2}{a_0^2+1} + \frac{b_1^2}{b_0^2+1}$$

(2) まず, $1 \leq i < j \leq n$ とし, $x_i = y_j, x_j = y_i, x_k = y_k$ ($k \neq i, k \neq j$) とすると, 条件より, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$

さらに $x_i > x_j$ のとき, (1)より

$$\frac{x_i^2}{i^2+1} + \frac{x_j^2}{j^2+1} > \frac{x_j^2}{i^2+1} + \frac{x_i^2}{j^2+1} = \frac{y_i^2}{i^2+1} + \frac{y_j^2}{j^2+1}$$

すると, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{k^2+1}$ となり, 同様にして $1 \leq p < q \leq n$ で $x_p > x_q$ の

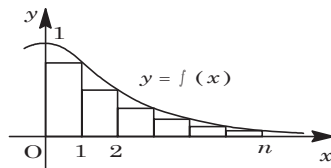
ときは, x_p の値と x_q の値を交換していくと, S_n の値は減少していく。よって, S_n の値が最小となるのは $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, すなわち $x_k = k$ のときである。

$$\text{以上より, } S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2+1}\right) = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

さて, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ とすると, $x > 0$ で

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ となり, } f(x) \text{ は}$$

単調に減少する。



右図において, 面積を比較して,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^n f(x) dx = \int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$x = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおき, $n = \tan \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とすると,

$$\int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^\alpha \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^\alpha d\theta = \alpha < \frac{\pi}{2} < \frac{3.2}{2} = \frac{8}{5} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より, } S_n > n - \frac{8}{5}, \text{ すなわち } \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

[解説]

(2)の前半は, わかっているのにそれを表現するのが難しく, もどかしく感じてしまいます。87年に東大・理で同じ考え方をする問題が出ています。

4

問題のページへ

(1) 条件 1 より $\triangle ABC$ は正三角形なので、以下、複号同順として、

$$\beta = \alpha + (\cos(\pm 60^\circ) + i \sin(\pm 60^\circ))(\gamma - \alpha) = \alpha + \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}(\gamma - \alpha) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また $\alpha = z + 1$ で、条件 2 より $\gamma = 3 - \alpha - \beta = 2 - z - \beta$ となり、これらを $\textcircled{1}$ に代入して、 $\beta = z + 1 + \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}(1 - 2z - \beta)$ より、 $(1 + \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2})\beta = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} \mp \sqrt{3}iz$

$$\beta = \frac{2}{3 \pm \sqrt{3}i} \left(\frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} \mp \sqrt{3}iz \right) = 1 + \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} z$$

$$\gamma = 2 - z - \left(1 + \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} z \right) = 1 + \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} z$$

(2) $u = \beta - 1, v = \gamma - 1, \omega = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ とおくと、(1)より、 $u = \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} z, v = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} z$ となるので、 u, v は $\omega z, \omega^2 z$ のどちらかになる。

これより、3点 z, u, v は原点を中心とする円周上にあり、しかも正三角形の頂点になっている。この3点を、偏角の小さいものから z_1, z_2, z_3 とするとき、これらは α, β, γ のいずれかを実軸方向に -1 だけ平行移動したものに对应する。また、

この正三角形に正弦定理を適用すると、条件 1 より $|z_1| = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = 1$ となり、

$$z_1 = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0^\circ \leq \theta < 120^\circ), \quad z_2 = \omega z_1, \quad z_3 = \omega^2 z_1$$

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \alpha\beta\gamma &= (z_1 + 1)(z_2 + 1)(z_3 + 1) = (z_1 + 1)(\omega z_1 + 1)(\omega^2 z_1 + 1) \\ &= (z_1 + 1)(\omega^3 z_1^2 + \omega^2 z_1 + \omega z_1 + 1) = (z_1 + 1)(z_1^2 - z_1 + 1) \\ &= z_1^3 + 1 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 + 1 = 1 + \cos 3\theta + i \sin 3\theta \end{aligned}$$

条件 3 より、 $(1 + \cos 3\theta)^2 + \sin^2 3\theta = 1$ かつ $\sin 3\theta > 0$

$0^\circ \leq \theta < 120^\circ$ で、 $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$ かつ $\sin 3\theta > 0$ より $3\theta = 120^\circ, \theta = 40^\circ$

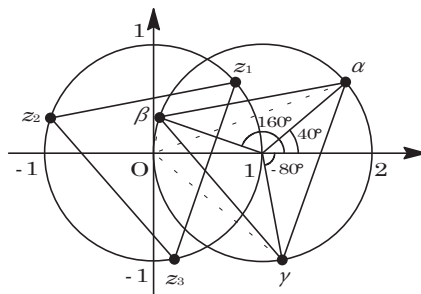
$$\arg z_2 = 40^\circ + 120^\circ = 160^\circ$$

$$\arg z_3 = 40^\circ + 240^\circ = 280^\circ$$

右図より、 $\arg \alpha = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$

$$\arg \beta = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ,$$

$$\arg \gamma = 360^\circ - \frac{80^\circ}{2} = 320^\circ$$



[解説]

(1)では、 $\triangle ABC$ の重心が点 1 であるのに最初に気付けば、計算量はかなり減少します。上の解は、それに途中で気付いたものです。

5

問題のページへ

$$(1) \quad p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0 \text{ より, } q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = -p \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(q\sqrt{2} + r\sqrt{3})^2 = p^2, \quad 2q^2 + 3r^2 + 2qr\sqrt{6} = p^2$$

$qr \neq 0$ のとき $\sqrt{6} = \frac{p^2 - 2q^2 - 3r^2}{2qr}$ となり, $\sqrt{6}$ が無理数であるのに反する。

よって $qr = 0$ より, $q = 0$ または $r = 0$

$q = 0$ のとき, ①より $r\sqrt{3} = -p$ となる。ここで $r \neq 0$ とすると $\sqrt{3} = -\frac{p}{r}$ となり, $\sqrt{3}$ が無理数であるのに反する。よって $r = 0$, $p = 0$ となる。

$r = 0$ のとき, ①より $q\sqrt{2} = -p$ となる。ここで $q \neq 0$ とすると $\sqrt{2} = -\frac{p}{q}$ となり, $\sqrt{2}$ が無理数であるのに反する。よって $q = 0$, $p = 0$ となる。

以上より, いずれの場合も $p = q = r = 0$ となる。

$$(2) \quad p, q, r \text{ を有理数として, } f(1) = p, \quad f(1 + \sqrt{2}) = q, \quad f(\sqrt{3}) = r \text{ と仮定する。}$$

$$1 + a + b = p \text{ より, } a + b = p - 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(1 + \sqrt{2})^2 + a(1 + \sqrt{2}) + b = q \text{ より, } (a + b + 3) + (a + 2)\sqrt{2} = q \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$3 + \sqrt{3}a + b = r \text{ より, } \sqrt{3}a + b = r - 3 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{4} \text{ より, } (\sqrt{3} - 1)a = r - p - 2, \quad a = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}(r - p - 2) \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{5} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入して, } (p - q + 2) + \frac{1}{2}(r - p - 2)\sqrt{6} + \frac{1}{2}(r - p + 2)\sqrt{2} = 0$$

$$(p - q + 2)\sqrt{2} + (r - p - 2)\sqrt{3} + (r - p + 2) = 0$$

$$(1) \text{ より, } p - q + 2 = 0, \quad r - p - 2 = 0, \quad r - p + 2 = 0$$

ところが, $r - p - 2 = 0$ かつ $r - p + 2 = 0$ は成立しないので, $f(1)$, $f(1 + \sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ がすべて有理数という場合はない。

よって, $f(1)$, $f(1 + \sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数である。

[解説]

(2)は, 一見, 難問の装いをしていますが, 見た目ほどではありませんでした。(1)の結果が使えるように式変形をしていけば, 自然に結論は導けます。

6

問題のページへ

$$x = \frac{3t-t^2}{t+1} \text{ より, } \frac{dx}{dt} = \frac{(3-2t)(t+1)-(3t-t^2)}{(t+1)^2} = -\frac{(t+3)(t-1)}{(t+1)^2}$$

$$y = \frac{3t^2-t^3}{t+1} \text{ より, } \frac{dy}{dt} = \frac{(6t-3t^2)(t+1)-(3t^2-t^3)}{(t+1)^2} = -\frac{2t(t^2-3)}{(t+1)^2}$$

右表より x と y の動く範囲は,

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 6\sqrt{3}-9$$

また点 (x, y) の描くグラフを C と

すると, C と直線 $y = x$ との共有点は,

$$\frac{3t-t^2}{t+1} = \frac{3t^2-t^3}{t+1}$$

$$t(t-1)(t-3) = 0$$

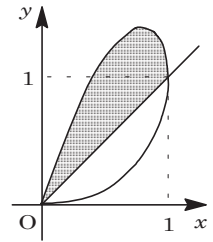
$$t = 0, 1, 3$$

| | | | | | | | |
|-----------------|---|------------|---|------------|---------------|------------|---|
| t | 0 | ... | 1 | ... | $\sqrt{3}$ | ... | 3 |
| $\frac{dx}{dt}$ | | + | 0 | - | | - | |
| x | 0 | \nearrow | 1 | \searrow | $6-3\sqrt{3}$ | \searrow | 0 |
| $\frac{dy}{dt}$ | 0 | + | | + | 0 | - | |
| y | 0 | \nearrow | 1 | \nearrow | $6\sqrt{3}-9$ | \searrow | 0 |

よって, C の概形は右図のようになる。

求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y \, dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \int_3^1 \frac{3t^2-t^3}{t+1} \cdot \frac{-(t+3)(t-1)}{(t+1)^2} dt - \frac{1}{2} \\ &= \int_1^3 \frac{t^2(3-t)(t+3)(t-1)}{(t+1)^3} dt - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



ここで, $t+1 = u$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{t^2(3-t)(t+3)(t-1)}{(t+1)^3} dt &= \int_2^4 \frac{(u-1)^2(4-u)(u+2)(u-2)}{u^3} du \\ &= \int_2^4 \frac{-u^5 + 6u^4 - 5u^3 - 20u^2 + 36u - 16}{u^3} du \\ &= \int_2^4 \left(-u^2 + 6u - 5 - \frac{20}{u} + \frac{36}{u^2} - \frac{16}{u^3} \right) du \\ &= \left[-\frac{1}{3}u^3 + 3u^2 - 5u - 20 \log u - \frac{36}{u} + \frac{8}{u^2} \right]_2^4 = \frac{89}{6} - 20 \log 2 \end{aligned}$$

$$\text{以上より, } S = \frac{89}{6} - 20 \log 2 - \frac{1}{2} = \frac{43}{3} - 20 \log 2$$

[解説]

最後の積分計算が煩雑なのですが, 難しいところはその点だけです。内容は基本的です。