1

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 2) を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 OAB に内接する円の中心の座標を求めよ。

(2) 中心が第 1 象限にあり, x 軸と y 軸の両方に接し, 直線 AB と異なる 2 つの交点をもつような円を考える。この 2 つの交点を P, Q とするとき, 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 次の条件 A をみたす座標平面上の点$(x,\ y)$全体の集合を図示せよ。

条件 A：すべての実数 t に対して $y \geqq xt - 2t^2$ が成立する。

(2) 次の条件 B をみたす座標平面上の点$(x,\ y)$全体の集合を図示せよ。

条件 B：$|t| \leqq 1$ をみたすすべての実数 t に対して $y \geqq xt - 2t^2$ が成立する。

3

解答解説のページへ

a を正の実数とし，放物線 $C : y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 $l : y = 8x + 6$ が接するような a の値を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた値のとき，放物線 C，直線 l，y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^{k-1}$ を求めよ。

(2) 次のように定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

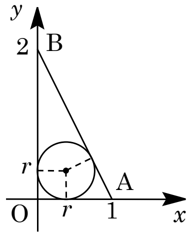
$$a_1=2,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

1

問題のページへ

(1)　$\triangle$OAB の内接円の半径を r とおくと，OA$=1$，OB$=2$，AB$=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ から，

$$(1-r)+(2-r)=\sqrt{5}\,,\ \ r=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

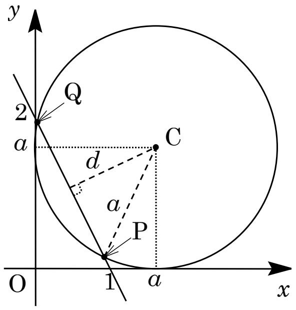


これより，円の中心の座標は$\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$である。

(2)　中心が第 1 象限にあり，x 軸と y 軸の両方に接する円 C は，半径を a とおくと中心はC$(a,\ a)$となる。

ここで，直線 AB は，その方程式が$\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}=1$すなわち$2x+y-2=0$であり，点 C との距離を d とおくと，

$$d=\frac{|2a+a-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|3a-2|}{\sqrt{5}}$$



まず，円 C が直線 AB と異なる 2 つの交点 P，Q をもつことより，$d<a$ であり，

$$\frac{|3a-2|}{\sqrt{5}}<a\,,\ \ (3a-2)^2<5a^2\,,\ \ a^2-3a+1<0$$

これより，$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$となり，この範囲のもとで，

$$\mathrm{PQ}=2\sqrt{a^2-d^2}=2\sqrt{a^2-\frac{(3a-2)^2}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{-a^2+3a-1}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}$$

よって，線分 PQ の長さは$a=\dfrac{3}{2}$のとき最大値$\dfrac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{\dfrac{5}{4}}=2$をとる。

［解 説］

円と直線の関係についての問題です。(1)は直角三角形の内接円の半径という超有名題でしたので，計算の簡単な方法を採用しましたが，(2)との関連を考えると$d=r$より求めるべきだったようです。

© 電送数学舎 2021

$\boxed{2}$

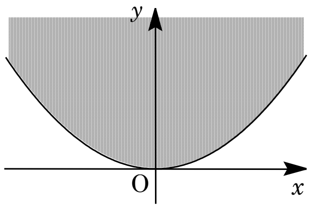
問題のページへ

(1)　まず，$f(t)=2t^2-xt+y=2\left(t-\dfrac{x}{4}\right)^2+y-\dfrac{x^2}{8}$ とおく。

すべての実数 t に対して $y\geqq xt-2t^2$ が成立する，すなわち $f(t)\geqq 0$ が成立する $(x,\ y)$ の条件は,

$$f\left(\frac{x}{4}\right)=y-\frac{x^2}{8}\geqq 0,\quad y\geqq\frac{x^2}{8}$$

これより，点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$|t|\leqq 1$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ をみたすすべての実数 t に対して $y\geqq xt-2t^2$ が成立する，すなわち $f(t)\geqq 0$ が成立する $(x,\ y)$ の条件は,

(i)　$\dfrac{x}{4}<-1$ $(x<-4)$ のとき　$f(-1)=2+x+y\geqq 0$ より，$y\geqq -x-2$

(ii)　$-1\leqq\dfrac{x}{4}\leqq 1$ $(-4\leqq x\leqq 4)$ のとき　$f\left(\dfrac{x}{4}\right)=y-\dfrac{x^2}{8}\geqq 0$ より，$y\geqq\dfrac{x^2}{8}$

(iii)　$\dfrac{x}{4}>1$ $(x>4)$ のとき　$f(1)=2-x+y\geqq 0$ より，$y\geqq x-2$

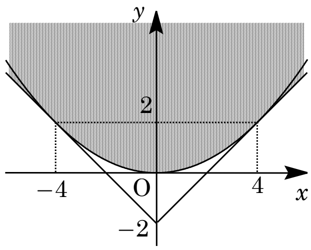
(i)〜(iii)より，点 $(x,\ y)$ 全体の集合は,

$$y\geqq -x-2\quad(x<-4)$$

$$y\geqq\frac{x^2}{8}\quad(-4\leqq x\leqq 4)$$

$$y\geqq x-2\quad(x>4)$$

これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

領域に関する頻出問題です。ポイントは $f(t)$ の最小値が 0 以上ということです。

© 電送数学舎 2021

3

問題のページへ

(1) 放物線 $C: y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$ と直線 $l: y = 8x + 6$ を連立して,

$$-x^2 - 2ax - a^3 + 10a = 8x + 6,\ x^2 + 2(a+4)x + a^3 - 10a + 6 = 0 \cdots\cdots(*)$$

C と l が接することより, $D/4 = (a+4)^2 - (a^3 - 10a + 6) = 0$ となり,

$$a^3 - a^2 - 18a - 10 = 0,\ (a-5)(a^2 + 4a + 2) = 0$$

すると, $a = 5,\ -2 \pm \sqrt{2}$ となり, $a > 0$ から $a = 5$ である。

(2) $a = 5$ のとき, $C: y = -x^2 - 10x - 75$ となり, $(*)$から,

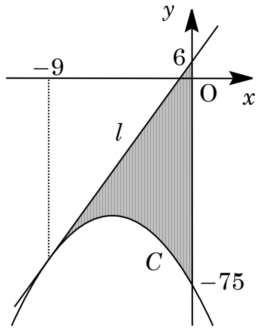
$$x^2 + 18x + 81 = 0,\ (x+9)^2 = 0$$

これより, C と l は $x = -9$ で接する。

このとき, C と l と y 軸で囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \int_{-9}^{0} \{(8x+6) - (-x^2 - 10x - 75)\}dx$$

$$= \int_{-9}^{0} (x+9)^2 dx = \frac{1}{3}\left[(x+9)^3\right]_{-9}^{0} = \frac{1}{3} \cdot 9^3 = 243$$



［解 説］

定積分と面積についての基本題です。やや数値が大きいですが。

© 電送数学舎 2021

4

問題のページへ

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$ とおくと,

$$S_n-2S_n=1+(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-n\cdot 2^n=\frac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^n=(1-n)\cdot 2^n-1$$

よって，$S_n=(n-1)\cdot 2^n+1$ である。

(2) 数列$\{a_n\}$は，$a_1=2$，$a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k\ (n\geqq 1)$ ……①で定義され,

$$a_n=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)a_k\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

以下，$n\geqq 2$ において，①②より,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)a_k$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n+1-k)a_k+\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}a_k+\frac{1}{2}a_n$$

$$a_{n+1}-\frac{3}{2}a_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\ \cdots\cdots\cdots③$$

これより，$a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$ ……④となり，③④より,

$$\left(a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}\right)-\left(a_{n+1}-\frac{3}{2}a_n\right)=\frac{1}{2}a_n,\quad a_{n+2}-\frac{5}{2}a_{n+1}+a_n=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，①から，$a_2=1+\frac{1}{2}(1+1-1)a_1=1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=2$

また，③から，$a_3-\frac{3}{2}a_2=\frac{1}{2}a_1$ となり，$a_3=\frac{3}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2=4$

さて，⑤から，$a_{n+2}-2a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-2a_n)$ となり,

$$a_{n+1}-2a_n=(a_3-2a_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=(4-2\cdot 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

また，⑤から，$a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)$ となり,

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\left(a_3-\frac{1}{2}a_2\right)\cdot 2^{n-2}=\left(4-\frac{1}{2}\cdot 2\right)\cdot 2^{n-2}=3\cdot 2^{n-2}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$\frac{3}{2}a_n=3\cdot 2^{n-2}$ となり，$a_n=2^{n-1}$ である。

以上より，数列$\{a_n\}$の一般項は，$a_1=2$，$a_n=2^{n-1}\ (n\geqq 2)$ である。

［解 説］

(1)は数列の和の典型題です。また，(2)は，与えられた漸化式を和と一般項の関係を利用して，普通に変形しましたが，ただ(1)の結果は利用しませんでした。ということは，出題の意図は「推測→帰納法」という解法ではないかと思われます。

© 電送数学舎 2021