1

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 2)を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　四面体 OABC に内接する球の中心の座標を求めよ。

(2)　中心の x 座標, y 座標, z 座標がすべて正の実数であり, xy 平面, yz 平面, zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わるとき, その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし，x の 2 次方程式

$$x^2-(4\cos\theta)x+\frac{1}{\tan\theta}=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式(＊)が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。

(2)　θ が(1)で求めた範囲にあるとし，(＊)の 2 つの虚数解を α，β とする。ただし，α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{O}(0)$ を通る円の中心を $\mathrm{C}(\gamma)$ とするとき，θ を用いて γ を表せ。

(3)　点 O, A, C を(2)のように定めるとき，三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上の点$(x,\ y)$について，次の条件を考える。

条件：すべての実数tに対して$y \leqq e^t - xt$が成立する …… (＊)

以下の問いに答えよ。必要ならば$\displaystyle\lim_{x \to +0} x\log x = 0$を使ってよい。

(1) 条件(＊)を満たす点$(x,\ y)$全体の集合を座標平面上に図示せよ。

(2) 条件(＊)を満たす点$(x,\ y)$のうち，$x \geqq 1$かつ$y \geqq 0$をみたすもの全体の集合をSとする。Sをx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

自然数 n と実数 a_0，a_1，a_2，…，a_n $(a_n \neq 0)$ に対して，2 つの整式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_1$$

を考える。α，β を異なる複素数とする。複素数平面上の 2 点 α，β を結ぶ線分上にある点 γ で，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ をみたすものが存在するとき，

α，β，$f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　$n=2$ のとき，どのような α，β，$f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2)　$\alpha=1-i$，$\beta=1+i$，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が平均値の性質をもつための，実数 a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。

(3)　$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$f(x)=x^7$ は，平均値の性質をもたないことを示せ。

5

解答解説のページへ

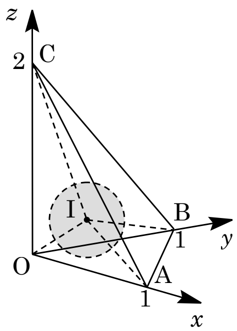
以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 n, k が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ。

(2)　p を素数とする。$k \leqq n$ をみたす自然数の組 $(n,\ k)$ で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ。

1

問題のページへ



(1)　4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$を頂点とする四面体 OABC に内接する球の半径を a とおくと，その中心 I の座標は$\mathrm{I}(a,\ a,\ a)$となり，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2},\ \triangle\mathrm{OAC}=\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$$

また，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\sqrt{5}$より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}$$

ここで，四面体 OABC の体積は，$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\right)\cdot 2=\frac{1}{3}$なので，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot a+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot a+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot a=\frac{1}{3}$$

すると，$4a=1$から$a=\frac{1}{4}$となり，$\mathrm{I}\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$である。

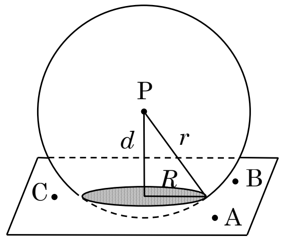
(2)　xy 平面, yz 平面, zx 平面と接する球 S の半径を r とおくと，その中心 P の座標は，x 座標, y 座標, z 座標がすべて正のとき，$\mathrm{P}(r,\ r,\ r)$とおくことができる。

さて，平面 ABC は，その方程式が$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$すなわち$2x+2y+z-2=0$であり，球 S の中心 P との距離 d は，$d=\frac{|2r+2r+r-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|5r-2|}{3}$となる。

ここで，球 S が平面 ABC と交わるとき，$d<r$から$\frac{|5r-2|}{3}<r$となり，

$$(5r-2)^2<9r^2,\ (5r-2+3r)(5r-2-3r)<0,\ (4r-1)(r-1)<0$$

これより，$\frac{1}{4}<r<1$となり，この条件のもとで，球 S と平面 ABC の交わりの円の半径 R は,



$$R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{r^2-\frac{(5r-2)^2}{9}}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{-16r^2+20r-4}=\frac{2}{3}\sqrt{-4r^2+5r-1}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{-4\left(r-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{9}{16}}$$

これより，R は$r=\frac{5}{8}$のとき最大値$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{1}{2}$をとり，このとき交わりの円の面積は最大値$\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$をとる。

［解 説］

球面と平面の交わりを題材にした頻出タイプの問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　2 次方程式 $x^2-(4\cos\theta)x+\dfrac{1}{\tan\theta}=0$ ……(＊)が実数解をもたない条件は,

$$D/4=4\cos^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}<0$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より $\tan\theta>0$ なので，$4\cos^2\theta\tan\theta-1<0$

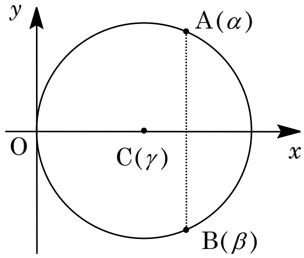
$$4\sin\theta\cos\theta<1,\ 2\sin2\theta<1,\ \sin2\theta<\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので①の解は $0<2\theta<\dfrac{\pi}{6}$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$ である。

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$ のとき，(＊)の虚数解を α，β とすると，$\beta=\overline{\alpha}$ であり，

$$\alpha+\overline{\alpha}=4\cos\theta,\ \alpha\overline{\alpha}=\frac{1}{\tan\theta}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{O}(0)$ を通る円の中心を $\mathrm{C}(\gamma)$ とすると，$\mathrm{A}(\alpha)$ と $\mathrm{B}(\beta)$ は実軸に対称なので $\mathrm{C}(\gamma)$ は実軸上にあり，$\gamma=\overline{\gamma}$ となる。



そして，$|\alpha-\gamma|=|\gamma|$ より $(\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\gamma)=\gamma^2$ となり，

$$\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})\gamma=0$$

②より，$\dfrac{1}{\tan\theta}-(4\cos\theta)\gamma=0$ となり，

$$\gamma=\frac{1}{4\cos\theta\tan\theta}=\frac{1}{4\sin\theta}\ \cdots\cdots\cdots③$$

(3)　$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形 OAC が直角三角形になるとき，$\angle\mathrm{OCA}=90^\circ$ であり，このとき線分 AB の中点が C に一致するので $\gamma=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$ となり，②③から，

$$\frac{1}{4\sin\theta}=\frac{4\cos\theta}{2},\ 8\sin\theta\cos\theta=1,\ 8\tan\theta\cos^2\theta=1,\ \frac{8\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=1$$

すると，$\tan^2\theta-8\tan\theta+1=0$ より，$\tan\theta=4\pm\sqrt{15}$

ここで，$\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ から，$0<\tan\theta<2-\sqrt{3}$ となり，

$$\tan\theta=4-\sqrt{15}$$

［解　説］

複素数平面上の円についての問題です。解と係数の関係をうまく適用することが重要です。

3

問題のページへ

(1)　$f(t)=e^t-xt-y$ とおくと，条件(＊)「すべての実数 t に対して $f(t)\geqq 0$」をみたす$(x,\ y)$の条件は，$f'(t)=e^t-x$ より，

(i)　$x<0$ のとき

$f'(t)>0$ より $f(t)$ は単調増加するが，$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$ より条件(＊)は不成立。

(ii)　$x=0$ のとき

$f(t)=e^t-y$ となり，条件(＊)から，$-y\geqq 0$ すなわち $y\leqq 0$ である。

(iii)　$x>0$ のとき

$f'(t)=0$ の解は $t=\log x$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになり，条件(＊)から，

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(\log x)=x-x\log x-y\geqq 0$$

$$y\leqq x-x\log x=x(1-\log x)$$

(i)〜(iii)より，求める$(x,\ y)$の条件は，

$$y\leqq 0\ (x=0\text{ のとき}),\quad y\leqq x(1-\log x)\ (x>0\text{ のとき})$$

さて，$y=x(1-\log x)$ に対して，

$$y'=(1-\log x)-x\cdot\frac{1}{x}=-\log x$$

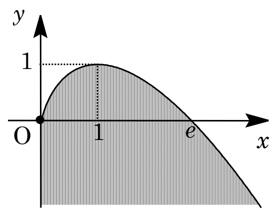
$x>0$ における y の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	1	$\searrow$

$$\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}x(1-\log x)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}x(1-\log x)=-\infty$$

以上より，条件(＊)をみたす点$(x,\ y)$全体の集合を座標平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　(1)の網点部の $x\geqq 1$ かつ $y\geqq 0$ の領域 S を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_1^e x^2(1-\log x)^2dx$$

$$=\pi\Big[\frac{x^3}{3}(1-\log x)^2\Big]_1^e-\pi\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot 2(1-\log x)\Big(-\frac{1}{x}\Big)dx$$

$$=-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi\int_1^e x^2(1-\log x)dx$$

$$\int_1^e x^2(1-\log x)dx=\Big[\frac{x^3}{3}(1-\log x)\Big]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\Big(-\frac{1}{x}\Big)dx$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(e^3-1)=\frac{e^3}{9}-\frac{4}{9}$$

以上より，$V=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{e^3}{9}-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{1}{27}(2e^3-17)\pi$ となる。

［解 説］

微積分の総合問題です。方針に迷うということはないと思いますが，計算量はかなりあります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　実数係数の $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_2\neq 0)$ に対して，$f'(x)=2a_2x+a_1$

さて，複素数 α，β $(\alpha\neq\beta)$ をとり，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{(a_2\beta^2+a_1\beta+a_0)-(a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0)}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{a_2(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+a_1(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a_2(\beta+\alpha)+a_1\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，2 点 α，β を結ぶ線分の中点を γ とすると，$\gamma=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$ となり，

$$f'(\gamma)=2a_2\gamma+a_1=a_2(\beta+\alpha)+a_1\cdots\cdots\cdots②$$

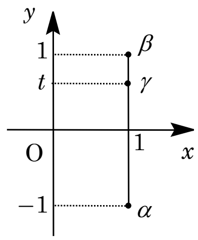
①②より，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ となるので，どのような α，β，$f(x)$ も平均値の性質をもつ。

(2)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=3x^2+2ax+b$

さて，$\alpha=1-i$，$\beta=1+i$ のとき，$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=1-i^2=2$ となり，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)-(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+a(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$
$$=\{(\beta+\alpha)^2-\alpha\beta\}+a(\beta+\alpha)+b=2^2-2+2a+b$$
$$=2a+b+2$$

ここで，α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつ条件は，2 点 α，β を結ぶ線分上に，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ をみたす点 γ が存在することより，$\gamma=1+ti$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ として，



$$2a+b+2=3(1+ti)^2+2a(1+ti)+b$$
$$3(1+2ti-t^2)+2a(1+ti)-2a-2=0$$
$$(1-3t^2)+2t(3+a)i=0$$

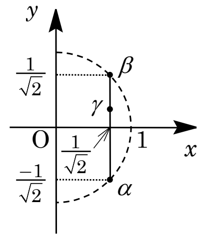
a，t は実数より，$1-3t^2=0$ かつ $2t(3+a)=0$ となり，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$a=-3$ である。

すると，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は $-1\leqq t\leqq 1$ をみたすことより，α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつ条件は，$a=-3$，b と c は任意の実数である。

(3)　$f(x)=x^7$ に対して，$f'(x)=7x^6$

さて，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\alpha^7=\cos\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)=\beta$，$\beta^7=\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}=\alpha$ となり，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^7-\alpha^7}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1$$



ここで，α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつと仮定すると, 2 点 α，β を結ぶ線分上に，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ をみたす点 γ が存在する。

そこで，$\gamma=r(\cos\theta+i\sin\theta)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq r\leqq 1,\ -\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$-1=7r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$ から,

$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=-\frac{1}{7}$$

すると，$\dfrac{1}{8}\leqq r^6\leqq 1$ から $r^6=\dfrac{1}{7}$ となり $r=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}$ であり，また $-\dfrac{3}{2}\pi\leqq 6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ から $6\theta=\pm\pi$ となり $\theta=\pm\dfrac{\pi}{6}$ である。

したがって，$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i\right)$ となるが，ともに実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ではないので，点 γ は 2 点 α，β を結ぶ線分上にない。

よって，α，β，$f(x)$ は平均値の性質をもたない。

［解　説］

問題文に与えられた「平均値の性質」という定義の理解を問うものです。(2)と(3)は具体例ですが，$f(x)$ の形に応じて処理方法を変えています。

5

問題のページへ

(1) 自然数 n, k が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき,

$$ {}_n\mathrm{C}_k - n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} - n = n\left(\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{2} - 1\right) $$

ここで, $n \geqq k+2$ より, $\dfrac{n-1}{k} - 1 = \dfrac{n-k-1}{k} \geqq \dfrac{k+2-k-1}{k} = \dfrac{1}{k} > 0$

$$ \frac{n-2}{k-1} - 1 = \frac{n-k-1}{k-1} \geqq \frac{k+2-k-1}{k-1} = \frac{1}{k-1} > 0 $$

$$ \frac{n-k+1}{2} - 1 = \frac{n-k-1}{2} \geqq \frac{k+2-k-1}{2} = \frac{1}{2} > 0 $$

一般的に, $0 \leqq l \leqq k-2$ をみたす整数 l に対して,

$$ \frac{n-l-1}{k-l} - 1 = \frac{n-k-1}{k-l} \geqq \frac{k+2-k-1}{k-l} = \frac{1}{k-l} > 0 $$

これより, $\dfrac{n-1}{k} > 1$, $\dfrac{n-2}{k-1} > 1$, $\cdots$, $\dfrac{n-k+1}{2} > 1$ となるので,

$$ \frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{2} - 1 > 0 $$

よって, ${}_n\mathrm{C}_k - n > 0$ から, ${}_n\mathrm{C}_k > n$ ……①である。

(2) 自然数 $n, k\,(k \leqq n)$, 素数 p に対して, ${}_n\mathrm{C}_k = p$ ……②のとき,

(i) $k=1$ のとき　②から ${}_n\mathrm{C}_1 = p$ となり, $n = p$ である。

(ii) $2 \leqq k \leqq n-2$ のとき

まず, ①から ${}_n\mathrm{C}_k > n$ なので, ②より $p > n$ である。

また, ②から $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = p$ となり, $n! = p\cdot k!\,(n-k)!$ である。すると, $n!$ は素数 p の倍数になり, これより $n \geqq p$ であるが, $p > n$ に反する。

よって, $2 \leqq k \leqq n-2$ のとき, ②をみたす $(n,\ k)$ は存在しない。

(iii) $k = n-1$ のとき　②から ${}_n\mathrm{C}_{n-1} = p$ となり, $n = p$ である。

(iv) $k = n$ のとき　②から ${}_n\mathrm{C}_n = p$ となり, $1 = p$ から成立しない。

(i)～(iv)より, ②をみたす $(n,\ k)$ は, $(n,\ k) = (p,\ 1)$, $(p,\ p-1)$ である。

［解 説］

二項係数を題材にした整数問題です。(2)の結論は, 具体例を考えたり, (1)の不等式を誘導としてみると, 予想可能なものです。