$\boxed{1}$

解答解説のページへ

座標空間内の 5 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{P}(4,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$を考える。3 点 O, A, B を通る平面をαとし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の両方に垂直であり，x成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル$\vec{n}$を求めよ。

(2)　平面αに関して点 P と対称な点P'の座標を求めよ。

(3)　点 R が平面α上を動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right|$が最小となるような点 R の座標を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数，α，β を相異なる実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　次をみたす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x-\alpha)(x-\beta)^2 Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C$$

(2)　(1)の A, B, C を n，α，β を用いて表せ。

(3)　(2)の A について，n と α を固定して，β を α に近づけたときの極限 $\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha} A$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

自然数 m, n が，$n^4=1+210m^2$ ……①をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。

(2) n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ。

(3) ①をみたす自然数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

4

解答解説のページへ

定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対し，$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ……① で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらず定まる。定積分は次の性質(A), (B), (C)をもつ。

(A)　$\displaystyle\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}dx = k\int_a^b f(x)dx + l\int_a^b g(x)dx$

(B)　$a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

(C)　区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)dx \geqq \int_a^b h(x)dx$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数，k, l は定数である。

以下，$f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とし，n を自然数とする。定積分の性質 $\boxed{\text{ア}}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式②と定積分の性質 $\boxed{\text{イ}}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

よって，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx$ が成り立つ。

(1)　関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$ が成り立つことを，導関数の定義に従って示せ。また，この等式と定積分の定義①を用いて，定積分の性質(A)で $k = l = 1$ とした場合の等式
$\displaystyle\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ を示せ。

(2)　定積分の定義①と平均値の定理を用いて，次を示せ。

$a < b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) > 0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$

(3)　(A), (B), (C)のうち，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式②を示せ。

(4)　(A), (B), (C)のうち，空欄 $\boxed{\text{イ}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式③を示せ。

5

解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x=5\cos t+\cos 5t,\quad y=5\sin t-\sin 5t\quad (-\pi \leqq t<\pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1)　区間 $0<t<\dfrac{\pi}{6}$ において，$\dfrac{dx}{dt}<0$，$\dfrac{dy}{dx}<0$ であることを示せ。

(2)　曲線 C の $0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分，x 軸，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

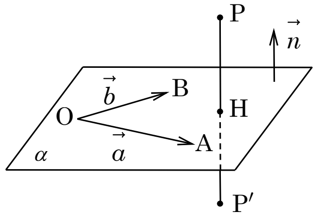
(3)　曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。

(4)　曲線 C の概形を図示せよ。

1

問題のページへ

(1)　3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(2, 1, 2) を通る平面 α に垂直な $\vec{n}$ について，$\vec{n}=(k,\ l,\ m)\ (k>0)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ から，



$$k+l=0\cdots\cdots①,\ 2k+l+2m=0\cdots\cdots②$$

また，$|\vec{n}|=1$ から，$k^2+l^2+m^2=1\cdots\cdots\cdots③$

①より $l=-k$，②から $2k-k+2m=0$ から $m=-\dfrac{k}{2}$ なので，③に代入して，

$$k^2+k^2+\frac{k^2}{4}=1,\ k^2=\frac{4}{9}$$

$k>0$ から $k=\dfrac{2}{3}$ となり，$l=-\dfrac{2}{3}$，$m=-\dfrac{1}{3}$ より，$\vec{n}=\dfrac{1}{3}(2,\ -2,\ -1)$ である。

(2)　平面 α は法線ベクトルが $\vec{n}=\dfrac{1}{3}(2,\ -2,\ -1)$ より，その方程式は，

$$2x-2y-z=0\cdots\cdots\cdots④$$

平面 α に関し点 P(4, 0, −1) と対称な点 P′ について，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=3p\vec{n}$（$p$ は定数）とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3p\vec{n}$ となり，線分 PP′ の中点 H は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}}{2}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3p\vec{n}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{p}{2}\cdot3\vec{n}=\left(4+p,\ -p,\ -1-\frac{p}{2}\right)$$

このとき，点 H は平面 α 上にあるので，④に代入して，

$$2(4+p)-2(-p)-\left(-1-\frac{p}{2}\right)=0,\ \frac{9}{2}p+9=0$$

よって，$p=-2$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(4,\ 0,\ -1)-2(2,\ -2,\ -1)=(0,\ 4,\ 1)$

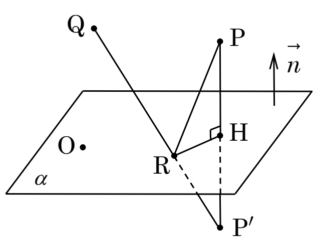
すなわち，P′(0, 4, 1) である。

(3)　$f(x,\ y,\ z)=2x-2y-z$ とおくと，④より平面 $\alpha : f(x,\ y,\ z)=0$ となり，2 点 P(4, 0, −1)，Q(4, 0, 5) に対して，

$$f(4,\ 0,\ -1)=8-0+1=9>0,\ f(4,\ 0,\ 5)=8-0-5=3>0$$

これより，2 点 P, Q は平面 α について同じ側にある。

さて，点 R が平面 α 上を動くとき，



$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P'R}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|\geqq|\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}|$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となる点 R の位置は，平面 α と線分 P′Q の交点である。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}=(4,\ -4,\ 4)$ より，直線 P′Q は，t を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 4,\ 1)+t(4,\ -4,\ 4)=(4t,\ 4-4t,\ 1+4t)\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$2\cdot4t-2(4-4t)-(1+4t)=0$ から $12t-9=0$ となり，$t=\dfrac{3}{4}$

よって，求める点 R の座標は，⑤から，$(3,\ 4-3,\ 1+3)=(3,\ 1,\ 4)$ である。

［解 説］

ベクトルの空間図形への応用について，頻出有名問題です。(2)と(3)は平面の方程式を利用する方法で記述しました。

2

問題のページへ

(1)　3 以上の自然数 n，相異なる実数 α，β に対して，x^n を $(x-\alpha)(x-\beta)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，$Q(x)$ は $n-3$ 次，$R(x)$ は 2 次以下の整式になり，

$$x^n=(x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+R(x)\cdots\cdots\cdots①$$

次に，$R(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割ったときの商は定数となるので A とし，余りは 1 次以下の整式なので $B(x-\alpha)+C$ とおくと，

$$R(x)=(x-\alpha)(x-\beta)A+B(x-\alpha)+C\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x^n=(x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha)+C\cdots\cdots\cdots③$

(2)　③に $x=\alpha$，$x=\beta$ を代入すると，$\alpha^n=C$，$\beta^n=B(\beta-\alpha)+C$ となり，

$$C=\alpha^n,\quad B=\frac{\beta^n-C}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$$

次に，③の両辺を微分すると，

$$nx^{n-1}=(x-\beta)^2Q(x)+2(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+(x-\alpha)(x-\beta)^2Q'(x)$$
$$+A(x-\beta)+A(x-\alpha)+B\cdots\cdots\cdots④$$

④に $x=\beta$ を代入すると，$n\beta^{n-1}=A(\beta-\alpha)+B$ となり，

$$A=\frac{n\beta^{n-1}-B}{\beta-\alpha}=\frac{n\beta^{n-1}}{\beta-\alpha}-\frac{\beta^n-\alpha^n}{(\beta-\alpha)^2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　⑤より，n と α を固定して，

$$A=\frac{n\beta^{n-1}-(\beta^{n-1}+\alpha\beta^{n-2}+\alpha^2\beta^{n-3}+\cdots+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-1})}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{(n-1)\beta^{n-1}-\alpha\beta^{n-2}-\alpha^2\beta^{n-3}-\cdots-\alpha^{n-2}\beta-\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}$$

ここで，$f(\beta)=(n-1)\beta^{n-1}-\alpha\beta^{n-2}-\alpha^2\beta^{n-3}-\cdots-\alpha^{n-2}\beta-\alpha^{n-1}$ とおくと，

$$f(\alpha)=(n-1)\alpha^{n-1}-\alpha^{n-1}-\alpha^{n-1}-\cdots-\alpha^{n-1}-\alpha^{n-1}=0$$

すると，$A=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ となり，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\alpha)\cdots\cdots\cdots⑥$

さて，$f'(\beta)=(n-1)^2\beta^{n-2}-(n-2)\alpha\beta^{n-3}-(n-3)\alpha^2\beta^{n-4}-\cdots-\alpha^{n-2}$ なので，

$$f'(\alpha)=(n-1)^2\alpha^{n-2}-(n-2)\alpha^{n-2}-(n-3)\alpha^{n-2}-\cdots-\alpha^{n-2}$$
$$=\{(n-1)^2-(n-2)-(n-3)-\cdots-1\}\alpha^{n-2}$$
$$=\left\{(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}\alpha^{n-2}$$
$$=\frac{1}{2}(n-1)\{(2n-2)-(n-2)\}\alpha^{n-2}=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$ となる。

［解 説］

整式の除法と極限の融合問題です。ポイントは，極限計算で微分係数の定義式に気づくことです。問題文に「n と α を固定して」と，それとなく誘導はついていますが。

3

問題のページへ

(1)　自然数 m, n に対して，$n^4 = 1 + 210m^2$ ………①

まず，①の右辺は奇数より左辺の n^4 は奇数，これより n および n^2 は奇数となり，$\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ はともに整数である。

ここで，$\dfrac{n^2+1}{2}$ と $\dfrac{n^2-1}{2}$ の公約数を p とおき，n_1，n_2 を自然数として，

$$\frac{n^2+1}{2} = pn_1,\quad \frac{n^2-1}{2} = pn_2$$

すると，$\dfrac{n^2+1}{2} - \dfrac{n^2-1}{2} = 1$ より $p(n_1 - n_2) = 1$ なので，$p = 1$ となる。

よって，$\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数である。

(2)　まず，①より $n^4 \geqq 211$ から n は 5 以上の奇数となり，k を 2 以上の自然数として $n = 2k+1$ とおくと，

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$$

すると，連続 2 整数の積 $k(k+1)$ は偶数なので，n^2-1 は 8 の倍数である。

また，①より $n^4 - 1 = 210m^2$ なので，$(n^2+1)(n^2-1) = 2\times3\times5\times7m^2$ ………②

そこで，mod3 で n，n^2，n^2+1 の対応関係を表にまとめると，右のようになる。

n	0	1	2
n^2	0	1	1
n^2+1	1	2	2

すると，n^2+1 は 3 の倍数にはならないので，②から n^2-1 が 3 の倍数となる。

次に，mod7 で n，n^2，n^2+1 の対応関係を表にまとめると，右のようになる。

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1
n^2+1	1	2	5	3	3	5	2

すると，n^2+1 は 7 の倍数にはならないので，②から n^2-1 が 7 の倍数となる。

したがって，n^2-1 は，8 の倍数かつ 3 の倍数かつ 7 の倍数となるので，$8\times3\times7 = 168$ の倍数である。

(3)　(2)から，$n^2 - 1 = 168l$ (l は自然数) となり，②に代入すると，

$$(168l+2)\cdot168l = 2\times3\times5\times7m^2,\quad 8l(84l+1) = 5m^2$$

$84l = 85l - l$ から，$8l(85l + 1 - l) = 5m^2$ ………③

③より，l または $1-l$ が 5 の倍数となることより，$l = 1,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ \cdots$

(i)　$l=1$ のとき　③より $m^2 = \dfrac{8\times1\times85}{5} = 8\times17$ となり不適である。

(ii)　$l=5$ のとき　③より $m^2 = \dfrac{8\times5\times421}{5} = 8\times421$ となり不適である。

(iii)　$l=6$ のとき　③より $m^2 = \dfrac{8\times6\times505}{5} = 8\times6\times101$ となり不適である。

(iv)　$l=10$ のとき　③より $m^2=\dfrac{8\times10\times841}{5}=16\times841=2^4\times29^2$

すると，$m=4\times29=116$ となり，$n^2=168\times10+1=1681=41^2$ から $n=41$

(i)～(iv)より，①をみたす自然数の 1 つ組は，$(m,\ n)=(116,\ 41)$ である。

［解 説］

誘導つきですが，難しめの整数問題です。(2)以降では，(1)の結論は利用せず，まず n の偶奇に着目して条件を絞り込んでいます。

4

問題のページへ

(1)　$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ のとき，

$$\{F(x)+G(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(x+h)+G(x+h)\}-\{F(x)+G(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\frac{G(x+h)-G(x)}{h}\right\}$$

$$=F'(x)+G'(x)$$

そして，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\cdots\cdots$①から，

$$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b\{F'(x)+G'(x)\}dx=\int_a^b\{F(x)+G(x)\}'dx$$

$$=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$

$$=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}$$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

(2)　区間 $a\leqq x\leqq b$ $(a<b)$ において，$g(x)>0$ のとき，平均値の定理より，

$$\frac{G(b)-G(a)}{b-a}=G'(c)=g(c)\quad(a<c<b)$$

すると，$g(c)>0$ から，$G(b)>G(a)$ となり，

$$\int_a^b g(x)dx=G(b)-G(a)>0$$

(3)　区間 $0\leqq x\leqq 1$ で増加関数である $f(x)$ に対して，n を自然数，i を $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ としたとき，区間 $\dfrac{i-1}{n}\leqq x\leqq\dfrac{i}{n}$ において，$f\left(\dfrac{i-1}{n}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\dfrac{i}{n}\right)$ となる。

ここで，定積分の性質(C)から，

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f\left(\frac{i-1}{n}\right)dx\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)dx\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f\left(\frac{i}{n}\right)dx$$

すると，$\displaystyle\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f\left(\frac{i-1}{n}\right)dx=\left[f\left(\frac{i-1}{n}\right)x\right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}=f\left(\frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)$

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f\left(\frac{i}{n}\right)dx=\left[f\left(\frac{i}{n}\right)x\right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}=f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

よって，$\displaystyle\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)dx\leqq\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdots\cdots\cdots$②

(4)　②より，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

ここで，$\displaystyle S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)+\frac{1}{n}\{f(1)-f(0)\}=S_n+\frac{1}{n}\{f(1)-f(0)\}$$

また，定積分の性質(B)から，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx=\int_{\frac{0}{n}}^{\frac{n}{n}} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

よって，$\displaystyle S_n \leqq \int_0^1 f(x)dx \leqq S_n+\frac{1}{n}\{f(1)-f(0)\}$となり，

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)dx - S_n \leqq \frac{f(1)-f(0)}{n} \cdots\cdots\cdots ③$$

［解　説］

定積分の定義を問う「共通テスト」風の問題です。見かけから判断すると構えてしまいますが，内容は基本的です。

5

問題のページへ

(1)　曲線 $C: x = 5\cos t + \cos 5t$，$y = 5\sin t - \sin 5t\ (-\pi \leqq t < \pi)$ に対して，

$$\frac{dx}{dt} = -5\sin t - 5\sin 5t = -10\sin 3t\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 5\cos t - 5\cos 5t = 10\sin 3t\sin 2t$$

$0 < t < \frac{\pi}{6}$ において，$0 < 3t < \frac{\pi}{2}$，$0 < 2t < \frac{\pi}{3}$ となるので，$\frac{dx}{dt} < 0$ である。

また，$\frac{dy}{dx} = \frac{10\sin 3t\sin 2t}{-10\sin 3t\cos 2t} = -\tan 2t$ から，$\frac{dy}{dx} < 0$ である。

(2)　(1)より，$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{6}$ において，x, y の増減は右表のようになる。さらに，曲線 C の凹凸を調べるために，

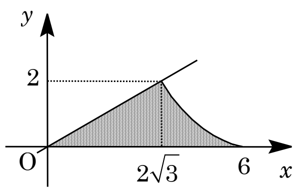
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	
x	6	$\searrow$	$2\sqrt{3}$
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	2

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{\cos^2 2t}\cdot\frac{1}{-10\sin 3t\cos 2t}$$

$$= \frac{1}{5\sin 3t\cos^3 2t} > 0$$

これより，$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{6}$ で，曲線 C は下に凸である。

すると，曲線 C の $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{6}$ の部分，x 軸，直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積 S は，



$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^{6} y\,dx$$

$$= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0}(5\sin t - \sin 5t)(-5\sin t - 5\sin 5t)\,dt$$

$$= 2\sqrt{3} + 5\int_0^{\frac{\pi}{6}}(5\sin^2 t + 4\sin 5t\sin t - \sin^2 5t)\,dt$$

$$= 2\sqrt{3} + 5\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{5}{2}(1-\cos 2t) - 2(\cos 6t - \cos 4t) - \frac{1}{2}(1-\cos 10t)\right\}dt$$

$$= 2\sqrt{3} + 5\left[2t - \frac{5}{4}\sin 2t - \frac{1}{3}\sin 6t + \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{1}{20}\sin 10t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2\sqrt{3} + 5\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{20}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{3}\pi + 2\sqrt{3} - \frac{25}{8}\sqrt{3} + \frac{5}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{3} = \frac{5}{3}\pi$$

(3)　$f(t) = 5\cos t + \cos 5t$，$g(t) = 5\sin t - \sin 5t$ とおくと，

$$x = f(t) = f(t+2\pi),\quad y = g(t) = g(t+2\pi)$$

これより，媒介変数 t の範囲 $-\pi \leqq t < \pi$ を，すべての実数としてもよい。

ここで，$f(-t)=5\cos t+\cos 5t=f(t)$，$g(-t)=-5\sin t+\sin 5t=-g(t)$ から，点$(f(-t),\ g(-t))$と点$(f(t),\ g(t))$は x 軸対称になり，曲線 C の$t\leqq 0$の部分と$t\geqq 0$の部分はx軸対称である。すなわち，曲線Cはx軸対称である。

さて，点$\mathrm{P}(x,\ y)$を原点まわりに$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転させたとき，点$\mathrm{P}'(x',\ y')$に移ったとして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x(1,\ 0)+y(0,\ 1)$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=x\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right)+y\left(\cos\frac{5\pi}{6},\ \sin\frac{5\pi}{6}\right)=x\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)+y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$$

これより，$x'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$，$y'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y\cdots\cdots\cdots(*)$

ここで，点$(f(t),\ g(t))$を原点まわりに$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転させたとき，$(*)$から，

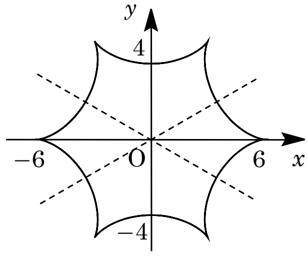
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f(t)-\frac{\sqrt{3}}{2}g(t)&=\frac{1}{2}(5\cos t+\cos 5t)-\frac{\sqrt{3}}{2}(5\sin t-\sin 5t)\\&=\frac{5}{2}\cos t-\frac{5}{2}\sqrt{3}\sin t+\frac{1}{2}\cos 5t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5t\\&=5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(5t+\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}f(t)+\frac{1}{2}g(t)&=\frac{\sqrt{3}}{2}(5\cos t+\cos 5t)+\frac{1}{2}(5\sin t-\sin 5t)\\&=\frac{5}{2}\sin t+\frac{5}{2}\sqrt{3}\cos t-\frac{1}{2}\sin 5t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t\\&=5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(5t+\frac{5\pi}{3}\right)=g\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

すると，点$(f(t),\ g(t))$を原点まわりに$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転させたとき，点$\left(f\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right),\ g\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$に移ることがわかる。そして，$t$ の範囲はすべての実数なので，C上の点を原点まわりに$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転させた点はC上にある。

(4) 曲線 C は x 軸対称なので，(2)で描いた C の$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$の部分を x 軸対称して$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$の部分を描く。そして，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$の部分を原点まわりに$\dfrac{\pi}{3}$ずつ回転させて，$\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{5\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{7\pi}{6}$，$\dfrac{7\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{11\pi}{6}$の部分を描く。

すると，$\dfrac{11\pi}{6}=2\pi-\dfrac{\pi}{6}$より，上記の部分を繋ぎ合わせると，曲線$C$の概形は右図のようになる。



［解 説］

パラメータ曲線の概形を描く問題です。ただ，かなりのボリュームがあり，ずいぶん時間を費やしてしまいます。なお，(3)の後半は，解答例では基本ベクトルの回転を利用しましたが，複素数平面を設定して処理する方法も考えられます。