1

解答解説のページへ

a を $0<a<9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 l を，次のように定める。

$$C: y=\left|(x-3)(x+3)\right|,\ \ l: y=a$$

曲線 C と直線 l で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y \leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ となる a の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 - x$ を考える。実数 $t > 0$ に対して，曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3 - t)$ における接線を l とする。直線 l と直線 $y = -x$ の交点を B，三角形 OAB の外接円の中心を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を t を用いて表せ。

(2) $\theta = \angle\mathrm{OBA}$ とする。$\sin^2\theta$ を t を用いて表せ。

(3) $f(t) = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}$ とする。$t > 0$ のとき，$f(t)$ を最小にする t の値と，$f(t)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{m}=(a,\ c)$，$\vec{n}=(b,\ d)$ に対して，$D=ad-bc$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D=0$ であることを示せ。

以下，$D\neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}$，$\vec{w}$ で，$\overrightarrow{m}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot\vec{w}=1$，$\overrightarrow{m}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ を満たすものを求めよ。

(3) 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して，$r\overrightarrow{m}+s\vec{n}=\vec{q}$ を満たす実数 r と s を $\vec{q}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

ω を $x^3=1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて，次の規則で 4 つの複素数 0，1，ω，ω^2 を並べていくことにより，複素数の列 z_1，z_2，z_3，…を定める。

- $z_1=0$ とする。
- z_k まで定まったとき，さいころを投げて，出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。
  - ◦ $z_k=0$ のとき，$z_{k+1}=\omega^t$ とする。
  - ◦ $z_k\neq 0$，$t=1,\ 2$ のとき，$z_{k+1}=0$ とする。
  - ◦ $z_k\neq 0$，$t=3$ のとき，$z_{k+1}=\omega z_k$ とする。
  - ◦ $z_k\neq 0$，$t=4$ のとき，$z_{k+1}=\overline{\omega z_k}$ とする。
  - ◦ $z_k\neq 0$，$t=5$ のとき，$z_{k+1}=z_k$ とする。
  - ◦ $z_k\neq 0$，$t=6$ のとき，$z_{k+1}=\overline{z_k}$ とする。

ここで複素数 z に対し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

(1) $\omega^2=\overline{\omega}$ となることを示せ。

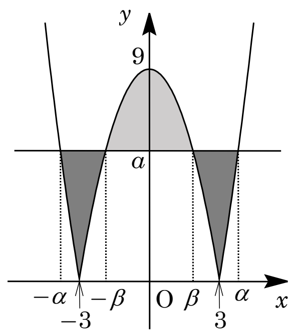
(2) $z_n=0$ となる確率を n の式で表せ。

(3) $z_3=1$，$z_3=\omega$，$z_3=\omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。

(4) $z_n=1$ となる確率を n の式で表せ。

1

問題のページへ



曲線$C: y=\left|(x-3)(x+3)\right|=\left|x^2-9\right|$に対して,

$y=x^2-9\ (x\leqq -3,\ 3\leqq x)$………①

$y=-x^2+9\ (-3<x<3)$………②

Cと直線$l: y=a\ (0<a<9)$……③との交点を求めると,

①③から$x^2-9=a$となり，$x=\pm\sqrt{a+9}$

②③から$-x^2+9=a$となり，$x=\pm\sqrt{9-a}$

そして，$\alpha=\sqrt{a+9}$，$\beta=\sqrt{9-a}$とおく。

さて，Cとlで囲まれる図形のうち，$y\geqq a$の領域にある部分の面積をS_1，$y\leqq a$の領域にある部分の面積をS_2とする。また，曲線②のlとx軸にはさまれた部分の面積をS_3とおくと，$S_1=S_2$から$S_1+S_3=S_2+S_3$が成り立ち,

$$S_1+S_3=\int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx=-\int_{-3}^{3}(x-3)(x+3)dx=\frac{1}{6}(3+3)^3=36$$

また，$\alpha^2=a+9$から$a=\alpha^2-9$となり,

$$S_2+S_3=2\alpha\cdot a-2\int_{3}^{\alpha}(x^2-9)dx=2\alpha(\alpha^2-9)-2\Big[\frac{x^3}{3}-9x\Big]_3^{\alpha}$$

$$=2\alpha^3-18\alpha-\frac{2}{3}(\alpha^3-27)+18(\alpha-3)=\frac{4}{3}\alpha^3-36$$

これより，$36=\frac{4}{3}\alpha^3-36$となり，$\alpha^3=54$から$\alpha=3\sqrt[3]{2}$である。

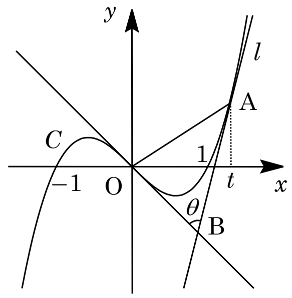
よって，求めるaの値は$a=9\sqrt[3]{4}-9$である。

［解　説］

定積分と面積についての問題です。上の解答例ではS_3を設定しましたが，このような計算の工夫がポイントです。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$C: y=x^3-x$ に対し $y'=3x^2-1$ となり，$\mathrm{A}(t,\ t^3-t)$ $(t>0)$ における接線 l の方程式は,

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)\,,\ \ y=(3t^2-1)x-2t^3$$

接線 l と直線 $y=-x$ の交点 B は，$-x=(3t^2-1)x-2t^3$ から $3t^2x=2t^3$ となり，$x=\dfrac{2}{3}t$，$y=-\dfrac{2}{3}t$ である。

よって，B の座標は $\left(\dfrac{2}{3}t,\ -\dfrac{2}{3}t\right)$ となる。

(2)　$\theta=\angle\mathrm{OBA}$ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BO}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}$ である。

まず，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\left(-\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t\right)=\dfrac{2}{3}t(-1,\ 1)$ から，$|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|=\dfrac{2}{3}t\sqrt{(-1)^2+1^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}t$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(t-\dfrac{2}{3}t,\ t^3-t+\dfrac{2}{3}t\right)=\dfrac{1}{3}t(1,\ 3t^2-1)$ から,

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\frac{1}{3}t\sqrt{1^2+(3t^2-1)^2}=\frac{1}{3}t\sqrt{9t^4-6t^2+2}$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\dfrac{2}{9}t^2(-1+3t^2-1)=\dfrac{2}{9}t^2(3t^2-2)$ から,

$$\cos^2\theta=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2}=\frac{4}{81}t^4(3t^2-2)^2\cdot\frac{9}{8t^2}\cdot\frac{9}{t^2(9t^4-6t^2+2)}$$

$$=\frac{(3t^2-2)^2}{2(9t^4-6t^2+2)}=\frac{9t^4-12t^2+4}{2(9t^4-6t^2+2)}$$

よって，$\sin^2\theta=1-\dfrac{9t^4-12t^2+4}{2(9t^4-6t^2+2)}=\dfrac{9t^4}{2(9t^4-6t^2+2)}$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の外心を P とすると，正弦定理より $\dfrac{\mathrm{OA}}{\sin\theta}=2\mathrm{OP}$ となり，(2)から,

$$f(t)=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(9t^4-6t^2+2)}{9t^4}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{9-\frac{6}{t^2}+\frac{2}{t^4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}$$

すると，$t>0$ より，$\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{3}{2}$ すなわち $t=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，$f(t)$ は最小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

［解　説］

3 次曲線を題材にした図形と式の問題です。(2)は tan の加法定理を利用する方法もありますが，ここは $\sin^2\theta$ との相性を考えて内積で処理しました。ただ，実数倍の箇所はカットして計算した方が楽でしたが。

3

問題のページへ

(1) $\vec{0}$でないベクトル$\vec{m}=(a,\ c)$，$\vec{n}=(b,\ d)$に対し，$\vec{m}\,/\!/\,\vec{n}$であるとき，

$$\vec{m}=t\vec{n}\ (t\neq 0)$$

これより，$a=tb$，$c=td$となり，$D=ad-bc=0$である。

逆に，$D=ad-bc=0\ (ad=bc)$であれば，

・$d\neq 0$のとき　$a=\dfrac{bc}{d}$となり，$\vec{m}=\left(\dfrac{bc}{d},\ c\right)=\dfrac{c}{d}(b,\ d)=\dfrac{c}{d}\vec{n}$から，$\vec{m}\,/\!/\,\vec{n}$である。

・$d=0$のとき　$bc=ad=0$となり，$\vec{n}\neq\vec{0}$から$b\neq 0$なので，$c=0$である。

すると，$\vec{m}=(a,\ 0)=\dfrac{a}{b}(b,\ 0)=\dfrac{a}{b}\vec{n}$から，$\vec{m}\,/\!/\,\vec{n}$である。

以上より，$\vec{m}$と$\vec{n}$が平行であるための必要十分条件は$D=0$である。

(2) 条件より，$D\neq 0$のもとで，$\vec{m}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot\vec{w}=1$ ……①，$\vec{m}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ ……②

まず，②から，k, lを実数として，$\vec{v}=k(d,\ -b)$，$\vec{w}=l(c,\ -a)$と表せる。

次に，①から，$k(ad-bc)=l(bc-ad)=1$となるので，

$$k=\frac{1}{ad-bc},\ l=-\frac{1}{ad-bc}$$

よって，$\vec{v}=\dfrac{1}{ad-bc}(d,\ -b)$，$\vec{w}=-\dfrac{1}{ad-bc}(c,\ -a)$である。

(3) $r\vec{m}+s\vec{n}=\vec{q}$に対し，$r\vec{m}\cdot\vec{v}+s\vec{n}\cdot\vec{v}=\vec{q}\cdot\vec{v}$ ……③，$r\vec{m}\cdot\vec{w}+s\vec{n}\cdot\vec{w}=\vec{q}\cdot\vec{w}$ ……④

①②を③と④にそれぞれ代入すると，$r=\vec{q}\cdot\vec{v}$，$s=\vec{q}\cdot\vec{w}$

［解 説］

2 つの平面ベクトルの関係についての問題です。(2)は，たとえば$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$の場合，$\vec{x}=\vec{0}$または$\vec{y}=\vec{0}$または$\vec{x}\perp\vec{y}$ということに着目しています。

4

問題のページへ

(1)　$x^3=1$ すなわち $x^3-1=0$ の解は，$(x-1)(x^2+x+1)=0$ より，$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

ここで，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，$\omega^2+\omega+1=0$ より，

$$\omega^2=-\omega-1=-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}$$

(2)　$\omega^1=\omega$，$\omega^2=\overline{\omega}$，$\omega^3=1$，$\omega^4=\omega^3\omega^1=\omega$，$\omega^5=\omega^3\omega^2=\overline{\omega}$，$\omega^6=\omega^3\omega^3=1$ であることに留意して，$z_n=0$ となる確率を p_n とおくと，$p_1=1$ で，

(a)　$z_n=0$ のとき

$z_{n+1}=1,\ \omega,\ \overline{\omega}$ より，$z_{n+1}=0$ となる場合はない。

(b)　$z_n\neq0$ のとき

$z_{n+1}=0$ となるのは $t=1,\ 2$ のときで，その確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

(a)(b)より，$p_{n+1}=0\cdot p_n+\dfrac{1}{3}(1-p_n)=-\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}$ ………(＊)

ここで，(＊)を $p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)$ と変形すると，

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(p_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ である。

(3)　$z_n=1$，$z_n=\omega$，$z_n=\omega^2=\overline{\omega}$ となる確率を，それぞれ q_n，r_n，s_n とおくと，$p_1=1$，$q_1=r_1=s_1=0$ で，

(i)　$z_n=0$ のとき　$z_{n+1}=0,\ 1,\ \omega,\ \overline{\omega}$ となる確率は，順に $0,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}$ である。

(ii)　$z_n=1$ のとき　$z_{n+1}=0,\ 1,\ \omega,\ \overline{\omega}$ となる確率は，順に $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}$ である。

(iii)　$z_n=\omega$ のとき　$z_{n+1}=0,\ 1,\ \omega,\ \overline{\omega}$ となる確率は，順に $\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}$ である。

(iv)　$z_n=\overline{\omega}$ のとき　$z_{n+1}=0,\ 1,\ \omega,\ \overline{\omega}$ となる確率は，順に $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}$ である。

(i)～(iv)をまとめると，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n+\dfrac{1}{3}r_n+\dfrac{1}{3}s_n$ ………①

$q_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n+\dfrac{1}{3}s_n$ ………②，$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{1}{3}r_n+\dfrac{1}{6}s_n$ ………③

$s_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{1}{3}r_n+\dfrac{1}{6}s_n$ ………④

①～④より，$p_2=0$，$q_2=r_2=s_2=\dfrac{1}{3}$ となり，

$$q_3=\frac{1}{3}p_2+\frac{1}{3}q_2+\frac{1}{3}s_2=\frac{2}{9},\quad r_3=s_3=\frac{1}{3}p_2+\frac{1}{6}q_2+\frac{1}{3}r_2+\frac{1}{6}s_2=\frac{2}{9}$$

(4)　③④から $r_{n+1}=s_{n+1}$ となり，$r_1=s_1=0$ と合わせると，$r_n=s_n$ ………⑤

④⑤より，$s_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{6}s_n=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{2}s_n\cdots\cdots\cdots$⑥

②⑥より，$q_{n+1}-s_{n+1}=\frac{1}{6}q_n-\frac{1}{6}s_n=\frac{1}{6}(q_n-s_n)$となり，

$$q_n-s_n=(q_1-s_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=0,\ q_n=s_n\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑦より，$q_n=r_n=s_n$となり，$p_n+q_n+r_n+s_n=1$から$p_n+3q_n=1$なので，

$$q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

［解　説］

確率と漸化式に複素数の絡んだ問題です。ただ，問題文が長く，しかも 4 つの状態があるため推移図が書きにくく，立式するのに注意深さが要求されます。