1

解答解説のページへ

係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい，可約でないとき既約であるという。たとえば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1)　x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2)　1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3)　x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。

2

解答解説のページへ

定数 a, b を係数とする 2 次関数 $y=-ax^2+b$ のグラフが, 原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする。ただし, $a>0$ とする。

(1) a, b の条件式, および接点の座標を求めよ。

(2) 与えられた 2 次関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分を, y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。

(3) V を最小にする a, b の値, およびそのときの V の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数として，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく。

(1)　$x<1$ において，$f(x)=-\log(1-x)-\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$ が成り立つことを示せ。ここで，log は自然対数を表す。

(2)　$|x|\leqq\dfrac{1}{3}$ とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

(i)　$x\geqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\leqq\frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

(ii)　$x<0$ において，$\left|\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right|\leqq\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

(iii)　$\left|f(x)-f(-x)-\log\dfrac{1+x}{1-x}\right|\leqq\dfrac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3)この不等式を用いて，$\log 2$ の近似値を誤差が $\dfrac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

$\boxed{4a}$

解答解説のページへ

複素数 $z=\cos 20°+i\sin 20°$ と，それに共役な複素数 $\overline{z}$ に対し，$\alpha = z+\overline{z}$ とする。

(1)　α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3)　有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

4b

解答解説のページへ

a, b, c を 0 でない実数として，空間内に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2) (1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3) (1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。

$\boxed{5a}$ 解答解説のページへ

平面上の点の極座標を，原点 O からの距離 $r(\geqq 0)$ と偏角 θ を用いて $(r,\ \theta)$ で表す。

(1) 平面上の 2 曲線

$$C_1 : r = 2\cos(\pi+\theta),\ C_2 : r = 2(\cos\theta+1)\left(\text{ただし}\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$$

の概形を描き，この 2 曲線 C_1，C_2 の交点の極座標を求めよ。

(2) 平面上の 3 点 P_1，P_2，E の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$，$(1,\ 0)$ とするとき，三角形 OEP_1 と三角形 $\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}$ とが相似となる点 Q を $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ で表す。点 $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。ただし，点 Q は $\angle\mathrm{EOP}_1 = \angle\mathrm{P}_2\mathrm{OQ}$ となるように向きも込めて定める。

(3) 3 点 O，P_1，P_2 が同一直線上にないとき，四辺形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{RP}_2$ が平行四辺形となるような点 R を $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ で表す。P_1，P_2 の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき，点 $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。

(4) さらに，平面上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，実数 k に対し点 $k\mathrm{P}$ を，$k \geqq 0$ のときは極座標が $(kr,\ \theta)$ となる点, $k<0$ のときは極座標が $(|k|r,\ \theta+\pi)$ となる点とする。(1)で求めた 2 曲線 C_1，C_2 の交点を V として，点 $k(\mathrm{V}\circ(\mathrm{V}*\mathrm{V}))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。

$\boxed{5b}$

解答解説のページへ

3 次単位行列 E の第 1 行の -2 倍を第 3 行に加えた行列を P とする。

(1)　$QP=E$ となる行列 Q を求めよ。

(2)　行列 $R=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ について，$S=PR$ を求めよ。

(3)　3×3 行列 A と 3×1 行列 B が与えられているとき，$PAX=PB$ を満たす行列 X は，また $AX=B$ を満たすことを示せ。

(4)　x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x-2y+z=a \\ -3x+4y-5z=b \\ 6x-5y+4z=c \end{cases}$$

の係数が作る行列を A として，この方程式を $AX=B$ で表すとき，この両辺に左から P をかけた連立 1 次方程式を書け。

(5)　上と同様の操作を繰り返すことより，(4)で与えた連立 1 次方程式が解をもつための条件を求め，解があるときはその解をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　合同を記号「$\equiv$」で表す。まず，1 次の M 多項式は x，$x+1$ だけなので，これらの積は，x^2，$x(x+1)=x^2+x$，$(x+1)^2=x^2+2x+1\equiv x^2+1$ となり，いずれも x^2+x+1 と合同でない。

よって，x^2+x+1 は既約な M 多項式である。

(2)　1 次の M 多項式は，x，$x+1$ でともに既約である。

2 次の M 多項式は，x^2，x^2+1，x^2+x，x^2+x+1 であり，既約なのは(1)より x^2+x+1 だけである。

3 次の M 多項式は，x^3，x^3+1，x^3+x，x^3+x+1，x^3+x^2，x^3+x^2+1，x^3+x^2+x，x^3+x^2+x+1 である。

ここで, 3 次の可約な M 多項式は,

$$x^3,\ x^2(x+1)=x^3+x^2,\ x(x+1)^2\equiv x(x^2+1)=x^3+x$$

$$(x+1)^3\equiv(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$$

$$x(x^2+x+1)=x^3+x^2+x$$

$$(x+1)(x^2+x+1)=x^3+2x^2+2x+1\equiv x^3+1$$

よって, 3 次の既約な M 多項式は，x^3+x+1，x^3+x^2+1 となる。

以上より, 3 次以下の既約な M 多項式は,

$$x,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^3+x+1,\ x^3+x^2+1$$

(3)　定数項が 1 である 4 次の可約な M 多項式をつくると,

$$(x+1)^4=(x+1)^2(x+1)^2\equiv(x^2+1)(x^2+1)=x^4+2x^2+1\equiv x^4+1$$

$$(x+1)^2(x^2+x+1)\equiv(x^2+1)(x^2+x+1)=x^4+x^3+2x^2+x+1$$

$$\equiv x^4+x^3+x+1$$

$$(x+1)(x^3+x+1)=x^4+x^3+x^2+2x+1\equiv x^4+x^3+x^2+1$$

$$(x+1)(x^3+x^2+1)=x^4+2x^3+x^2+x+1\equiv x^4+x^2+x+1$$

$$(x^2+x+1)^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1\equiv x^4+x^2+1$$

以上より，x^4+x+1 は既約な M 多項式である。

[解 説]

題意を理解して，既約な M 多項式の積を考えればよいというのを把握するのに時間がかかります。なお，本問は理系では必答，文系では選択題となっています。

2

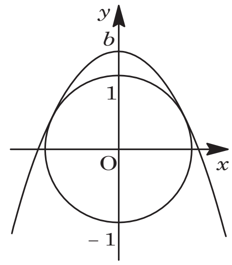
問題のページへ

(1)　$y=-ax^2+b$ ……①と $x^2+y^2=1$ ……②が接していることより，

②から，$x^2=1-y^2$

①に代入して，$y=-a(1-y^2)+b$

$ay^2-y-a+b=0$ ………③



$a>0$ より，③が重解 $y=\dfrac{1}{2a}$ を $0<y<1$ にもつので，

$D=1+4a(a-b)=0$，$0<\dfrac{1}{2a}<1$

よって，$a>\dfrac{1}{2}$ において，$b=\dfrac{4a^2+1}{4a}$ ………④

このとき，②から $x^2=1-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{4a^2-1}{4a^2}$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{4a^2-1}}{2a}$ となるので，接点の座標は，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{4a^2-1}}{2a},\ \dfrac{1}{2a}\right)$ となる。

(2)　(1)より，$V=\displaystyle\int_0^b \pi x^2dy=\pi\int_0^b -\frac{y-b}{a}dy=-\frac{\pi}{a}\left[\frac{1}{2}y^2-by\right]_0^b=\frac{\pi b^2}{2a}$

$=\dfrac{\pi}{2a}\cdot\dfrac{(4a^2+1)^2}{16a^2}=\dfrac{\pi(4a^2+1)^2}{32a^3}$

(3)　$f(a)=\dfrac{(4a^2+1)^2}{a^3}$ とおくと，$V=\dfrac{\pi}{32}f(a)$ となる。

$$f'(a)=\frac{16a(4a^2+1)\cdot a^3-(4a^2+1)^2\cdot 3a^2}{a^6}$$
$$=\frac{(4a^2+1)(4a^2-3)}{a^4}$$
$$=\frac{(4a^2+1)(2a-\sqrt{3})(2a+\sqrt{3})}{a^4}$$

a	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	…
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘		↗

右表より，$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $f(a)$ は最小値をとる。このとき④より，$b=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

また最小値は，$V=\dfrac{\pi}{32}f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{32}\cdot\dfrac{128}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}\pi$

［解 説］

第１問と異なり，定型的な問題です。短時間でゲットしたい問題です。

3

問題のページへ

(1) $t \neq 1$ のとき，$1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\dfrac{1-t^n}{1-t}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{t^n}{1-t}$

$x<1$ として，両辺を 0 から x まで積分すると，

$$\int_0^x (1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})\,dt=\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$\left[\, t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{t^n}{n}\,\right]_0^x=-\Big[\log|1-t|\Big]_0^x-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

よって，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}=-\log(1-x)-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

(2) まず, $0 \leqq t \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ において，$\dfrac{t^n}{1-t} \leqq \dfrac{t^n}{1-\frac{1}{3}} \leqq \dfrac{3t^n}{2}$ より，

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqq \int_0^x \frac{3t^n}{2}\,dt=\frac{3}{2}\left[\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\right]_0^x=\frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$$

また，$-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq t \leqq 0$ において，$\left|\dfrac{t^n}{1-t}\right|=\dfrac{|t|^n}{|1-t|} \leqq |t|^n=(-t)^n$

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqq \int_x^0 \left|\frac{t^n}{1-t}\right| dt \leqq \int_x^0 (-t)^n\,dt=(-1)^n\left[\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\right]_x^0=(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

よって，$\left|\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqq \dfrac{(-x)^{n+1}}{n+1}=\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

さて, (1)より，$f(x)+\log(1-x)=-\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ ……①なので，

$$f(-x)+\log(1+x)=-\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}\,dt \quad\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$f(x)-f(-x)+\log(1-x)-\log(1+x)=-\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt+\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}\,dt$

$$f(x)-f(-x)-\log\frac{1+x}{1-x}=-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt-\int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$\left|f(x)-f(-x)-\log\frac{1+x}{1-x}\right|=\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt+\int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt\right|$$

$$\leqq \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right|+\left|\int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \quad\cdots\cdots\cdots③$$

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$\left|\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right|=\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}=\frac{3|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

$$\left|\int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt\right|=\left|\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqq \frac{|-x|^{n+1}}{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

(ii)　$-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 0$ のとき　$\left|\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right|\leqq\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

$$\left|\int_{-x}^{0}\frac{t^n}{1-t}dt\right|=\left|\int_0^{-x}\frac{t^n}{1-t}dt\right|\leqq\frac{3(-x)^{n+1}}{2(n+1)}=\frac{3|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

(i)(ii)のいずれの場合も③は，$\left|f(x)-f(-x)-\log\dfrac{1+x}{1-x}\right|\leqq\dfrac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$ ………④

(3)　④に $x=\dfrac{1}{3}$ を代入すると，$\left|f\left(\dfrac{1}{3}\right)-f\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\log 2\right|\leqq\dfrac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)}$

$n=2$ のとき，$\dfrac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{5}{162}>\dfrac{1}{100}$

$n=3$ のとき，$\dfrac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{5}{648}\leqq\dfrac{1}{100}$

よって，$n=3$ のとき，log2 と $f\left(\dfrac{1}{3}\right)-f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ との誤差は $\dfrac{1}{100}$ 以下となるので，

求める log2 の近似値は，

$$f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27}\right)=\frac{56}{81}$$

［解 説］

(3)の結論を導くのに，たいへん丁寧な誘導がつけられています。しかし，それにしても解を書くのに時間がかかります。

4a

問題のページへ

(1)　$\alpha = z+\bar{z} = (\cos 20°+i\sin 20°)+(\cos 20°-i\sin 20°) = 2\cos 20°$ から，$\cos 20° = \dfrac{\alpha}{2}$

ここで，$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$ より，

$\dfrac{1}{2} = 4\cdot\dfrac{\alpha^3}{8} - 3\cdot\dfrac{\alpha}{2}$，$\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$………①

よって，α は3次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$……②の解である。

(2)　$f(x) = x^3 - 3x - 1$ とおくと，

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

$f(-1) > 0$，$f(1) < 0$ より，$f(x) = 0$ は 3 個の実数解をもつ。

ここで，この解が有理数であると仮定すると，$p>0$ で p と q を互いに素な整数として，$x = \dfrac{q}{p}$ とおくことができる。

②より，$\dfrac{q^3}{p^3} - 3\cdot\dfrac{q}{p} - 1 = 0$，$q^3 - 3p^2q - p^3 = 0$，$q^3 = p^2(3q+p)$

p^2 は q^3 の約数となるが，p と q は互いに素な整数なので，$p = 1$ となる。すなわち，$f(x) = 0$ の解はすべて整数となる。

ところが，$f(-2) = -3 < 0$，$f(-1) = 1 > 0$，$f(0) = -1 < 0$，$f(1) = -3 < 0$，$f(2) = 1 > 0$ より，$f(x) = 0$ の解は $-2 < x < -1$，$-1 < x < 0$，$1 < x < 2$ に 1 つずつあり，整数解は存在しない。

したがって，3 個の実数解は，いずれも有理数ではない。

(3)　a，b を有理数として，$x = \alpha$ を解とする 2 次方程式を，一般性を失うことなく $x^2 + ax + b = 0$ とできるので，$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$……③となる。

ここで，$x^3 - 3x - 1$ を $x^2 + ax + b$ で割ると，

$x^3 - 3x - 1 = (x^2 + ax + b)(x - a) + (a^2 - b - 3)x + (ab - 1)$………④

$x = \alpha$ を④に代入すると，①③より $(a^2 - b - 3)\alpha + (ab - 1) = 0$

a, b は有理数，α は無理数なので，$a^2 - b - 3 = 0$……⑤，$ab - 1 = 0$……⑥

⑤より $b = a^2 - 3$ となり，⑥に代入して $a^3 - 3a - 1 = 0$ となるが，この方程式の解は(2)より有理数でない。よって，③は成立しない。

以上より，有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しない。

［解 説］

さまざまな分野の融合したおもしろい問題です。選択という扱いでは，惜しい気もします。

4b

問題のページへ

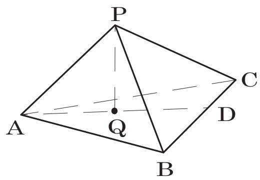
(1) BC を $2:1$ に内分する点を D とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{3},\ \ \overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

条件より, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ より, 点 P は 2 点 A, D を直径の両端とする球を描く。すなわち 2 点 P, Q の距離が一定である定点 Q は, この球の中心で, 線分 AD の中点である。

ここで, $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ より, $\mathrm{D}\left(0,\ \frac{b}{3},\ \frac{2c}{3}\right)$ となり, $\mathrm{Q}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{6},\ \frac{c}{3}\right)$ である。



(2) (1)より, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって, 点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にある。

(3) まず, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,\ 0,\ c)$ から,

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

また, 球の半径は, $\mathrm{AQ}=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{6}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2}=\frac{1}{6}\sqrt{9a^2+b^2+4c^2}$

四面体 ABCP の体積が最大となるのは, PQ が平面 ABC に垂直なときなので, $\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}$ より, その最大値 V は,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{9a^2+b^2+4c^2}$$
$$=\frac{1}{36}\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(9a^2+b^2+4c^2)}$$

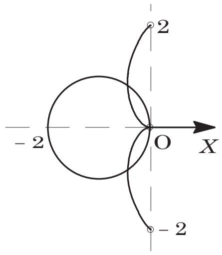
［解　説］

空間ベクトルの基本題です。省略した算法とコンピュータ分野の問題も含めて, 理系の第 4 問は本問を選択するのがベストです。

5a

問題のページへ

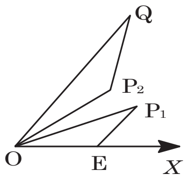
(1)　C_1 は $r=2\cos(\pi+\theta)=-2\cos\theta$ ……①より，原点と点$(2,\ \pi)$を直径の両端とする円となる。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ より原点を除く。



また，C_2 は $r=2(\cos\theta+1)$ ……②よりカージオイドを表し，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ よりその一部分となる。なお，両端の 2 点 $\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(2,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ は除く。

さらに，C_1，C_2 の交点は，①②より $-2\cos\theta=2(\cos\theta+1)$ から，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

よって，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ より $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{4\pi}{3}$ となり，①より $r=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$ となるので，交点は $\left(1,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\left(1,\ \dfrac{4\pi}{3}\right)$ である。

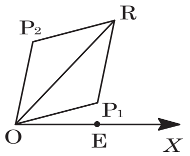


(2)　$\triangle\mathrm{OEP_1}\backsim\triangle\mathrm{OP_2Q}$ より，$\mathrm{OP_1}:\mathrm{OQ}=\mathrm{OE}:\mathrm{OP_2}$

$$\mathrm{OQ}=\frac{\mathrm{OP_1}\cdot\mathrm{OP_2}}{\mathrm{OE}}=r_1r_2$$

また，$\angle\mathrm{EOP_1}=\angle\mathrm{P_2OQ}$ より，$\angle\mathrm{EOQ}=\theta_1+\theta_2$

よって，点 Q すなわち $\mathrm{P_1}*\mathrm{P_2}$ の座標は，$(r_1r_2,\ \theta_1+\theta_2)$



(3)　$\mathrm{OP_1}=\mathrm{OP_2}$ より，平行四辺形 $\mathrm{OP_1RP_2}$ はひし形となる。

OR は $\angle\mathrm{P_1OP_2}$ の二等分線となり，$\angle\mathrm{EOR}=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$

$$\mathrm{OR}=2\mathrm{OP_1}\cos\angle\mathrm{P_1OR}=2r\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

よって，点 R すなわち $\mathrm{P_1}\circ\mathrm{P_2}$ の座標は，$\left(2r\cos\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2},\ \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

(4)　まず，$\mathrm{V}\left(1,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ のとき，点 $\mathrm{V}*\mathrm{V}$ は $\left(1,\ \dfrac{4\pi}{3}\right)$，$\mathrm{V}\circ(\mathrm{V}*\mathrm{V})$ は $\left(2\cos\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right)$ より $(1,\ \pi)$ となる。また，$\mathrm{V}\left(1,\ \dfrac{4\pi}{3}\right)$ のとき，点 $\mathrm{V}*\mathrm{V}$ は $\left(1,\ \dfrac{8\pi}{3}\right)$ すなわち $\left(1,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\mathrm{V}\circ(\mathrm{V}*\mathrm{V})$ は $\left(2\cos\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right)$ より $(1,\ \pi)$ となる。

すると，いずれの場合も $\mathrm{V}\circ(\mathrm{V}*\mathrm{V})$ は $(1,\ \pi)$ となり，点 $k(\mathrm{V}\circ(\mathrm{V}*\mathrm{V}))$ の偏角は，$k\geqq 0$ のとき π，$k<0$ のとき 2π である。

よって，この点が曲線 C_1 上にある条件は，(1)より $k=2$ である。

［解 説］

(1)の曲線を描くときの説明は，この程度でよいのかどうか迷います。

$\boxed{5b}$

問題のページへ

(1) $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$で，$QP=E$より，$Q=P^{-1}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\-2&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&1\end{pmatrix}$$ より，$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

(2) $$S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\-2a_1+c_1&-2a_2+c_2&-2a_3+c_3&-2a_4+c_4\end{pmatrix}$$

(3) (1)よりP^{-1}が存在するので，$PAX=PB$に左からかけて，

$P^{-1}PAX=P^{-1}PB$，$EAX=EB$，$AX=B$

(4) 条件より，$\begin{cases}3x-2y+z=a\\-3x+4y-5z=b\\6x-5y+4z=c\end{cases}$

行列の積としてまとめると，

$$\begin{pmatrix}3&-2&1\\-3&4&-5\\6&-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots①$$

①を$AX=B$として，左からPをかけると，$PAX=PB\cdots\cdots\cdots②$

$$PA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&1\\-3&4&-5\\6&-5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-3&4&-5\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$PB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\-2a+c\end{pmatrix}$$

したがって②は，$\begin{pmatrix}3&-2&1\\-3&4&-5\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\-2a+c\end{pmatrix}$となる。

求める連立1次方程式は，$\begin{cases}3x-2y+z=a\\-3x+4y-5z=b\\-y+2z=-2a+c\end{cases}$

(5)　(4)より，$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & a \\ -3 & 4 & -5 & b \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & a \\ 0 & 2 & -4 & a+b \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -3a+b+2c \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 5a-2c \\ 0 & 0 & 0 & -3a+b+2c \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix}$

よって，連立 1 次方程式が解をもつための条件は，$-3a+b+2c=0$

このとき，$3x-3z=5a-2c$，$-y+2z=-2a+c$

$$x-z=\frac{5}{3}a-\frac{2}{3}c\,,\ \ y-2z=2a-c$$

t を任意の実数として，$z=t$ とおくと，$x=\dfrac{5}{3}a-\dfrac{2}{3}c+t$，$y=2a-c+2t$ から，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{5}{3}a-\frac{2}{3}c+t,\ 2a-c+2t,\ t\right)$$

［解 説］

(1)は普通に消去法で逆行列を求めてしまいましたが，その後の設問を読むと，出題者の意図に反しているように思えました。同じことは(5)にも当てはまり，行の交換などはせずに，消去法については知らぬふりをして解くのが正しい姿勢なのかという疑問も湧いてきます。なお，省略した統計の問題も含めて，理系の第 5 問は，上記の点はあるにせよ，本問を選択するのがベストでしょう。