1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め, その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a=0$ のとき, 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め, その範囲を ab 平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

3a

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1$ ($n=1$，2，3，…) で与える。a_1，…，a_nの積をP_nとおく。

(1)　各nについて$a_n>0$であることを示せ。

(2)　各nについて$a_{n+1}=P_n+1$であることを示せ。

(3)　$S_n=\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$とおく。$S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_4$を求めよ。

(4)　各nについてS_nをP_nで表せ。

3b

解答解説のページへ

(1)　自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか。

(2)　自然数 a, b が互いに素であるなら a^2，b^2 は互いに素であることを示せ。

(3)　n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし，有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。

(4)　n が自然数のとき，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。

4a

解答解説のページへ

複素数平面上の点 z を考える。

(1)　実数 a, c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき，$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ を満たす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2)　0 でない複素数 d に対して，$dz(\overline{z}+1)=\overline{d}\,\overline{z}(z+1)$ を満たす点 z はどのような図形を描くか。

4b

解答解説のページへ

サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を $X_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)$ とする。

(1)　$n=7$ のとき, 3 の目が 3 回, 5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。

(2)　一般の n に対して，$X_1=2$ となる確率 $P(X_1=2)$ を求めよ。

(3)　一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4)　一般の n に対して，期待値 $E(X_1+X_n)$ を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ に対して，$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$

関数 $f(x)$ がつねに増加する条件は，$f'(x)\geqq 0$ である。ただし，等号は恒等的には成立しない。

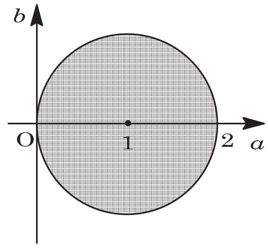
(i)　$a=0$ のとき　$f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$ なので，$2b=0$ かつ $b+1>0$

よって，$b=0$ となる。

(ii)　$a\neq 0$ のとき　$a>0$ かつ $f'(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$

$$D/4=(a+b)^2-2a(b+1)\leqq 0,\ a^2+b^2-2a\leqq 0$$

よって，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$



(i)(ii)より，$a=b=0$，または $a>0$ かつ $(a-1)^2+b^2\leqq 1$

すなわち，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。

(2)　$a=0$ のとき，$x>-1$ で $f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$ となる条件は，

(i)　$2b=0$ のとき　(1)より適する。

(ii)　$2b\neq 0$ のとき　$2b>0$ かつ $f'(-1)=-2b+b+1=-b+1\geqq 0$

よって, $0<b\leqq 1$ となる。

(i)(ii)より，求める条件は, $0\leqq b\leqq 1$

(3)　$a\neq 0$ のとき　$f'(x)=2a\left(x+\dfrac{a+b}{2a}\right)^2-\dfrac{a^2+b^2-2a}{2a}$

$x>-1$ で $f'(x)\geqq 0$ となる条件は, $a>0$ において,

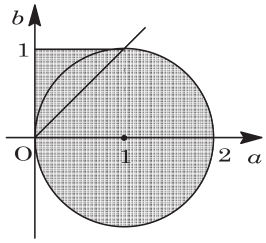
(i)　$-\dfrac{a+b}{2a}\leqq -1$ $(b\geqq a)$ のとき

$f'(-1)=2a-2(a+b)+b+1=-b+1\geqq 0$ より, $b\leqq 1$ となる。

(ii)　$-\dfrac{a+b}{2a}>-1$ $(b<a)$ のとき

$f'(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$ なので, (1)より,

$$(a-1)^2+b^2\leqq 1$$



(2)と合わせると，$a=0$ のとき $0\leqq b\leqq 1$，$a>0$ のとき $b\geqq a$ ならば $b\leqq 1$ で，$b<a$ ならば $(a-1)^2+b^2\leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。

[解 説]

ていねいに場合分けをして，結論を導いていく標準的な問題です。

2

問題のページへ

(1)　点$(p,\ q)$に関する，点$(X,\ Y)$に対称な点を$(x,\ y)$とすると，

$$\frac{x+X}{2}=p,\quad \frac{y+Y}{2}=q$$

$x=2p-X,\ y=2q-Y$ より，対称点の座標は$(2p-X,\ 2q-Y)$となる。

(2)　$G: y=x^3+ax^2+bx+c$ ……①上の点$(X,\ Y)$に対して，

$$Y=X^3+aX^2+bX+c \text{ ………②}$$

G 上の点$(p,\ p^3+ap^2+bp+c)$に関して対称移動した点を$(x,\ y)$とすると，

$$X=2p-x,\ Y=2(p^3+ap^2+bp+c)-y \text{ ………③}$$

②③より，$2(p^3+ap^2+bp+c)-y=(2p-x)^3+a(2p-x)^2+b(2p-x)+c$

$$y=x^3-(a+6p)x^2+(12p^2+4ap+b)x-6p^3-2ap^2+c \text{ ………④}$$

①と④が一致する条件は，

$$a=-a-6p \text{ ……⑤},\ b=12p^2+4ap+b \text{ ……⑥},\ c=-6p^3-2ap^2+c \text{ ……⑦}$$

⑤より $p=-\frac{1}{3}a$ となり，このとき⑥⑦はともに成立する。

すると，$q=p^3+ap^2+bp+c=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$ となり，G はこのグラフ上の点 $\left(-\frac{1}{3}a,\ \frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\right)$に関して点対称である。

(3)　直線$x=p$に関する，点$(X,\ Y)$に対称な点を$(x,\ y)$とすると，

$$\frac{x+X}{2}=p,\quad y=Y$$

$x=2p-X,\ y=Y$ より，対称点の座標は$(2p-X,\ Y)$となる。

(4)　(2)と同様にして，$X=2p-x,\ Y=y$ を②に代入すると，

$$y=-x^3+(a+6p)x^2-(12p^2+4ap+b)x+8p^3+4ap^2+2bp+c \text{ ………⑧}$$

x^3の係数を比べると，どんな p の値に対しても①と⑧は一致しない。

したがって, G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でない。

［解 説］

3 次曲線の有名な性質についての証明問題です。このように，一度きっちり証明しておくと記憶に残ります。

3a

問題のページへ

(1) 条件より，$a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1=\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ なので，$n\geqq 2$ で $a_n>0$

また $a_1=2>0$ から，すべての自然数 n に対して，$a_n>0$ となる。

(2) 条件より，$a_{n+1}-1=a_n{}^2-a_n=a_n(a_n-1)$

$$a_{n+1}-1=(a_1-1)a_1a_2\cdots\cdots a_n=(2-1)P_n=P_n$$

よって，$a_{n+1}=P_n+1$

(3) (2)の結果を用いて，$a_1=2$，$a_2=P_1+1=a_1+1=3$，$a_3=P_2+1=a_1a_2+1=7$，$a_4=P_3+1=a_1a_2a_3+1=43$ となる。

$$S_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2},\ S_2=S_1+\frac{1}{a_2}=\frac{5}{6},\ S_3=S_2+\frac{1}{a_3}=\frac{41}{42}$$

$$S_4=S_3+\frac{1}{a_4}=\frac{1805}{1806}$$

(4) (3)より，$S_n=\dfrac{P_n-1}{P_n}$ と推測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$S_1=\dfrac{1}{2}=\dfrac{P_1-1}{P_1}$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき　$S_k=\dfrac{P_k-1}{P_k}$ と仮定すると，$P_{k+1}=P_ka_{k+1}$，$a_{k+1}=P_k+1$ より，

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{P_k-1}{P_k}+\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{(P_k-1)a_{k+1}+P_k}{P_ka_{k+1}}=\frac{P_ka_{k+1}-a_{k+1}+P_k}{P_ka_{k+1}}$$
$$=\frac{P_{k+1}-a_{k+1}+P_k}{P_{k+1}}=\frac{P_{k+1}-1}{P_{k+1}}$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$S_n=\dfrac{P_n-1}{P_n}$

［解 説］

(1)と(2)は数学的帰納法を利用するまでもありませんでした。(4)は(3)の流れから，やはり数学的帰納法の登場ですが。

3b

問題のページへ

(1)　自然数 a と b の公約数が 1 だけであることを, a, b が互いに素であるいう。

(2)　a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_m は素数として, a, b を素因数分解すると,

$$a = {a_1}^{k_1}{a_2}^{k_2}\cdots{a_n}^{k_n},\ b = {b_1}^{l_1}{b_2}^{l_2}\cdots{b_m}^{l_m}$$

ただし, k_1, k_2, …, k_n, l_1, l_2, …, l_m は自然数とする。

$$a^2 = {a_1}^{2k_1}{a_2}^{2k_2}\cdots{a_n}^{2k_n},\ b^2 = {b_1}^{2l_1}{b_2}^{2l_2}\cdots{b_m}^{2l_m}$$

a, b が互いに素であるとき, a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_m に同じ数はない。すると, ${a_1}^2$, ${a_2}^2$, …, ${a_n}^2$, ${b_1}^2$, ${b_2}^2$, …, ${b_m}^2$ にも同じ数はない。

すなわち, a^2, b^2 は互いに素である。

(3)　$\sqrt{n}$ が有理数であるとき, p と q を互いに素な自然数として, $\sqrt{n} = \dfrac{q}{p}$ とおく。

$$q = p\sqrt{n},\ q^2 = p^2 n$$

これより, p^2 は q^2 の約数となるが, (1)より p^2, q^2 は互いに素であるので, $p^2 = 1$, すなわち $p = 1$ となる。

よって, $\sqrt{n}$ は自然数である。

(4)　$\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ のうち多くとも 1 つは無理数であると仮定する。

すると, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ の少なくとも 2 つが有理数であり, (3)より $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ の少なくとも 2 つが自然数である。よって, n, $n+1$, $n+2$ の少なくとも 2 つが平方数となる。

ところが, 平方数どうしの差は 3 以上なので, 連続 3 整数 n, $n+1$, $n+2$ のうち平方数となる数は, 多くとも 1 つである。

したがって, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数である。

［解 説］

(4)がメインの問題ですが, ステップを 1 つずつ確認しながら進まないと, 足を踏みはずしてしまいそうです。

$\boxed{4}$a

問題のページへ

(1)　条件より，$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0\ (a\neq 0)$ なので，

$$z\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}z+\frac{b}{a}\bar{z}+\frac{c}{a}=0,\ \left(z+\frac{b}{a}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}\right)=-\frac{c}{a}+\frac{b\bar{b}}{a^2}$$

a は実数より，$\left(z+\dfrac{b}{a}\right)\left(\overline{z+\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|^2=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$

ここで，$|b|^2-ac>0$ なので，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，点 z は中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円を描く。

(2)　条件より，$dz(\bar{z}+1)=\bar{d}\bar{z}(z+1)$，$(d-\bar{d})z\bar{z}+dz-\bar{d}\bar{z}=0$

(i)　$d=\bar{d}$（d が実数）のとき

$dz-d\bar{z}=0$ より，$d\neq 0$ より $z=\bar{z}$ となり，点 z は実軸を描く。

(ii)　$d\neq\bar{d}$（d が虚数）のとき

$z\bar{z}+\dfrac{d}{d-\bar{d}}z-\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\bar{z}=0$ より，$\left(z-\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right)\left(\bar{z}+\dfrac{d}{d-\bar{d}}\right)=-\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\cdot\dfrac{d}{d-\bar{d}}$

$$\left(z-\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right)\left(\overline{z-\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}}\right)=\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\cdot\overline{\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}},\ \left|z-\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|^2=\left|\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|^2$$

よって，$\left|z-\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|=\left|\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|$ より，点 z は中心 $\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}$，半径 $\left|\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|$ の円を描く。

［解　説］

複素数平面における円の方程式が題材です。(2)でも共役複素数を前面に出さずに，$z=x+yi$ として解けますが，結論を d を用いて記述するのに苦労します。

4b

問題のページへ

(1)　3 回の 3 の目，2 回の 5 の目の以外に，3 以下の目が少なくとも 1 回出たとき $X_4=3$，すべて 4 以上で 4 の目が少なくとも 1 つ出たとき $X_4=4$，すべて 5 以上のとき $X_4=5$ となる。

よって，$X_4=\{3,\ 4,\ 5\}$ である。

(2)　$X_1=2$ となるのは，すべて 2 以上で 2 の目が少なくとも 1 回出たときなので，

$$P(X_1=2)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3)　(2)と同様に考えて，$P(X_1=1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$P(X_1=3)=\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n,\ P(X_1=4)=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n$$

$$P(X_1=5)=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n,\ P(X_1=6)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

よって，
$$\begin{aligned}E(X_1)&=1\times\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+2\times\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n\right\}+3\times\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n\right\}\\&\quad+4\times\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}+5\times\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+6\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\\&=1+\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\\&=1+\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{aligned}$$

(4)　(3)と同様に考えて，$P(X_n=1)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$，$P(X_n=2)=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$P(X_n=3)=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n,\ P(X_n=4)=\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n$$

$$P(X_n=5)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n,\ P(X_n=6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，
$$\begin{aligned}E(X_n)&=1\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\times\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+3\times\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}\\&\quad+4\times\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n\right\}+5\times\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n\right\}+6\times\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}\\&=6-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{aligned}$$

以上より，$E(X_1+X_n)=E(X_1)+E(X_n)=7$

[解　説]

最大値，最小値の確率を求める有名問題です。(4)の最後の 1 行以外は数学Ⅰの範囲です。