1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め, その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a=0$ のとき, 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め, その範囲を ab 平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。ただし，m，n は共には 0 でないとする。

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

3

解答解説のページへ

空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は 1 辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0<r\leqq\sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1) 高さが $z=t$ $(-r\leqq t\leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0<r\leqq\sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

4 a　　解答解説のページへ

複素数平面上の点 z を考える。

(1)　実数 a, c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき，$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0$ を満たす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2)　0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p, q に対して

$$d(z-p)(\bar{z}-\bar{q})=\bar{d}(z-q)(\bar{z}-\bar{p})$$

を満たす点 z はどのような図形を描くか。

4b

解答解説のページへ

サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を $X_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)$ とする。

(1) $n=7$ のとき, 3 の目が 3 回, 5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。

(2) 一般の n に対して，$X_1=2$ となる確率 $P(X_1=2)$ を求めよ。

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E(X_1)-1)$ を求めよ。ここで log は自然対数を表す。

(5) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1+X_n)$ を求めよ。

$\boxed{5\,\mathrm{a}}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1)　$\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2)　$\alpha(t)$，$\beta(t)$ を求めよ。

(3)　t が a から b（$a<b$）まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする。L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

5b

解答解説のページへ

$p,\ q$ を整数とし, $x,\ y$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$4x+9y=p,\quad 2x+6y=q$$

を考える。

(1) この方程式を行列を用いて表し, 係数行列の逆行列を求めよ。

(2) 上の連立方程式の解 $x,\ y$ が共に整数であるような組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。ただし, $0\leqq p\leqq 5,\ 0\leqq q\leqq 5$ とする。

(3) 正の数 d で「d のどんな倍数 $p,\ q$ に対しても上の連立方程式の解 $x,\ y$ が整数になる」ものが存在することを示せ。

(4) (3)における d のうちで最小のものを求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\frac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ に対して，$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$

関数 $f(x)$ がつねに増加する条件は，$f'(x)\geqq 0$ である。ただし，等号は恒等的には成立しない。

(i)　$a=0$ のとき　$f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$ なので，$2b=0$ かつ $b+1>0$

よって，$b=0$ となる。

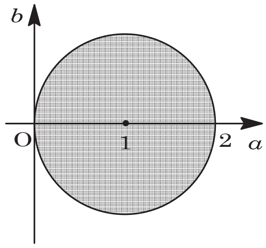
(ii)　$a\neq 0$ のとき　$a>0$ かつ $f'(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$

$$D/4=(a+b)^2-2a(b+1)\leqq 0,\ a^2+b^2-2a\leqq 0$$

よって，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

(i)(ii)より，$a=b=0$，または $a>0$ かつ $(a-1)^2+b^2\leqq 1$

すなわち，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。



(2)　$a=0$ のとき，$x>-1$ で $f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$ となる条件は,

(i)　$2b=0$ のとき　(1)より適する。

(ii)　$2b\neq 0$ のとき　$2b>0$ かつ $f'(-1)=-2b+b+1=-b+1\geqq 0$

よって, $0<b\leqq 1$ となる。

(i)(ii)より，求める条件は, $0\leqq b\leqq 1$

(3)　$a\neq 0$ のとき　$f'(x)=2a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2-\frac{a^2+b^2-2a}{2a}$

$x>-1$ で $f'(x)\geqq 0$ となる条件は, $a>0$ において,

(i)　$-\frac{a+b}{2a}\leqq -1$ $(b\geqq a)$ のとき

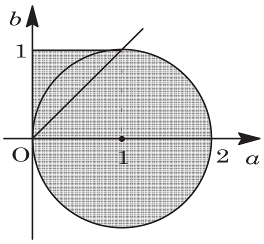
$f'(-1)=2a-2(a+b)+b+1=-b+1\geqq 0$ より, $b\leqq 1$ となる。

(ii)　$-\frac{a+b}{2a}>-1$ $(b<a)$ のとき

$f'(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$ なので, (1)より,

$$(a-1)^2+b^2\leqq 1$$

(2)と合わせると，$a=0$ のとき $0\leqq b\leqq 1$，$a>0$ のとき $b\geqq a$ ならば $b\leqq 1$ で，$b<a$ ならば $(a-1)^2+b^2\leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。



［解　説］

ていねいに場合分けをして，結論を導いていく標準的な問題です。

2　　　問題のページへ

(1)　点$(p,\ q)$に関する，点$(X,\ Y)$に対称な点を$(x,\ y)$とすると，

$$\frac{x+X}{2}=p,\quad \frac{y+Y}{2}=q$$

$x=2p-X,\ y=2q-Y$より，対称点の座標は$(2p-X,\ 2q-Y)$となる。

(2)　$G: y=x^3+ax^2+bx+c$ ……①上の点$(X,\ Y)$に対して，

$$Y=X^3+aX^2+bX+c \text{ ………②}$$

G上の点$(p,\ p^3+ap^2+bp+c)$に関して対称移動した点を$(x,\ y)$とすると，

$$X=2p-x,\ Y=2(p^3+ap^2+bp+c)-y \text{ ………③}$$

②③より，$2(p^3+ap^2+bp+c)-y=(2p-x)^3+a(2p-x)^2+b(2p-x)+c$

$$y=x^3-(a+6p)x^2+(12p^2+4ap+b)x-6p^3-2ap^2+c \text{ ………④}$$

①と④が一致する条件は，

$$a=-a-6p \text{ ……⑤},\ b=12p^2+4ap+b \text{ ……⑥},\ c=-6p^3-2ap^2+c \text{ ……⑦}$$

⑤より$p=-\frac{1}{3}a$となり，このとき⑥⑦はともに成立する。

すると，$q=p^3+ap^2+bp+c=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$となり，$G$はこのグラフ上の点$\left(-\frac{1}{3}a,\ \frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\right)$に関して点対称である。

(3)　直線$mx+ny=0$に関する，点$(X,\ Y)$に対称な点を$(x,\ y)$とすると，この直線の法線ベクトル$\vec{n}$が$\vec{n}=(m,\ n)$なので，

$$(x,\ y)=(X,\ Y)+k(m,\ n)=(X+km,\ Y+kn)$$

ここで，点$(X,\ Y)$と点$(x,\ y)$の中点$\left(X+\frac{1}{2}km,\ Y+\frac{1}{2}kn\right)$が，$mx+ny=0$上にあるので，

$$m\left(X+\frac{1}{2}km\right)+n\left(Y+\frac{1}{2}kn\right)=0,\ k=-\frac{2(mX+nY)}{m^2+n^2}$$

よって，$x=X-\frac{2(mX+nY)}{m^2+n^2}m=\frac{(n^2-m^2)X-2mnY}{m^2+n^2}$

$$y=Y-\frac{2(mX+nY)}{m^2+n^2}n=\frac{-2mnX+(m^2-n^2)Y}{m^2+n^2}$$

対称点の座標は$\left(\frac{(n^2-m^2)X-2mnY}{m^2+n^2},\ \frac{-2mnX+(m^2-n^2)Y}{m^2+n^2}\right)$となる。

(4)　$p=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},\ q=\frac{2mn}{m^2+n^2}$とおくと，(3)より$x=-pX-qY,\ y=-qX+pY$

(2)と同様にして，$X=-px-qy$，$Y=-qx+py$を②に代入すると，

$$-qx+py=(-px-qy)^3+a(-px-qy)^2+b(-px-qy)+c \text{ ………⑧}$$

$q\neq 0$のときは，明らかに⑧は①と一致しない。

$q=0$のときは，$p \neq 0$ となり，$y=-p^2x^3+apx^2-bx+\dfrac{c}{p}$ ………⑨

x^3の係数を比べると，どんな p の値に対しても $-p^2<0$ なので，⑨は①と一致しない。

したがって, G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でない。

［解 説］

3 次曲線の有名な性質についての証明問題です。このように，一度きっちり証明しておくと記憶に残ります。文系では, (3)(4)が y 軸に平行な直線に関する対称性を問う問題でした。

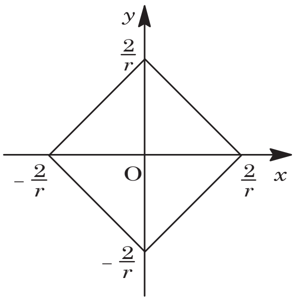
3

問題のページへ

(1)　中心軸が x 軸で，断面が半径 r の円である円柱は，$y^2+z^2 \leqq r^2$ ………①

また，中心軸が z 軸で，断面が右図のような 1 辺 $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形である正四角柱は，

$$|x|+|y| \leqq \frac{2}{r} \text{ ………②}$$

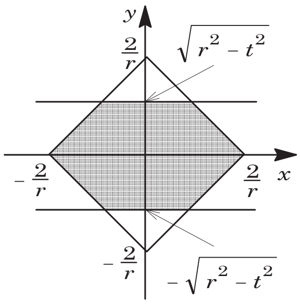


①②の共通部分を平面 $z=t\ (-r \leqq t \leqq r)$ で切ったときの切り口は，$y^2+t^2 \leqq r^2$，$|x|+|y| \leqq \dfrac{2}{r}$

$$-\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2}\,,\ |x|+|y| \leqq \frac{2}{r}$$

さて，$0<r \leqq \sqrt{2}$ から，$\dfrac{2}{r} \geqq r \geqq \sqrt{r^2-t^2}$

よって，$z=t$ での切り口は右図の網点部となり，その面積を $S(t)$ とすると，



$$S(t)=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}-\sqrt{r^2-t^2}\right)^2\right\}\times 4$$
$$=\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}+2t^2-2r^2$$

(2)　共通部分 K が xy 平面に関して対称なので，

$$V(r)=2\int_0^r S(t)\,dt=2\int_0^r\left(\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}+2t^2-2r^2\right)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt=\pi r^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\pi r^2$ より，

$$V(r)=\frac{16}{r}\cdot\frac{1}{4}\pi r^2+2\left[\frac{2}{3}t^3-2r^2t\right]_0^r=4\pi r-\frac{8}{3}r^3$$

(3)　$V'(r)=4\pi-8r^2=-4(2r^2-\pi)$

右表より，$0<r \leqq \sqrt{2}$ において，$r=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ のときに $V(r)$ は最大となり，最大値は，

r	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\sqrt{\pi}$$

である。

［解　説］

10 年も前になりますが，直交する円柱と円柱の共通部分の体積を求める問題が 1991 年に出ました。今年は円柱と正四角柱でしたが，それにしても，現行課程になってもこの種類の問題はよく出題されます。

$\boxed{4\,\mathrm{a}}$ 問題のページへ

(1) 条件より，$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0\ (a\neq 0)$ なので，

$$z\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}z+\frac{b}{a}\bar{z}+\frac{c}{a}=0,\quad \left(z+\frac{b}{a}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}\right)=-\frac{c}{a}+\frac{b\bar{b}}{a^2}$$

a は実数より，$\left(z+\dfrac{b}{a}\right)\left(\overline{z+\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|^2=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$

ここで，$|b|^2-ac>0$ なので，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，点 z は中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円を描く。

(2) 条件より，$d(z-p)(\bar{z}-\bar{q})=\bar{d}(z-q)(\bar{z}-\bar{p})$ ………①

$$(d-\bar{d})z\bar{z}+(\bar{d}\bar{p}-d\bar{q})z+(\bar{d}q-dp)\bar{z}+(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)=0 \text{ ………②}$$

(i) $d=\bar{d}$（d が実数）のとき

①より $d(z-p)(\bar{z}-\bar{q})=d(z-q)(\bar{z}-\bar{p})$ となり，$d\neq 0$ なので，

$$(z-p)(\bar{z}-\bar{q})=(z-q)(\bar{z}-\bar{p}) \text{ ………③}$$

$z=q$ のとき③は成立し，$z\neq q$ のとき $\dfrac{z-p}{z-q}=\dfrac{\bar{z}-\bar{p}}{\bar{z}-\bar{q}}$ となり，t を実数として，

$$\frac{z-p}{z-q}=t,\quad z-p=t(z-q)$$

よって，点 z は 2 点 p,q を結ぶ直線を描く。

(ii) $d\neq\bar{d}$（d が虚数）のとき

②より，$i(d-\bar{d})z\bar{z}+i(\bar{d}\bar{p}-d\bar{q})z+i(\bar{d}q-dp)\bar{z}+i(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)=0$ ………④

ここで，$a=i(d-\bar{d})$，$b=i(\bar{d}q-dp)$，$c=i(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)$ とおくと，a，c は実数，$\bar{b}=i(\bar{d}\bar{p}-d\bar{q})$ となり，④は $az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0\ (a\neq 0)$ と表せる。

$$\begin{aligned}|b|^2-ac&=i(\bar{d}q-dp)\cdot i(\bar{d}\bar{p}-d\bar{q})-i(d-\bar{d})\cdot i(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)\\&=-(\bar{d}q-dp)(\bar{d}\bar{p}-d\bar{q})+(d-\bar{d})(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)\\&=d\bar{d}(p\bar{p}+q\bar{q}-p\bar{q}-\bar{p}q)=|d|^2(p-q)(\bar{p}-\bar{q})\\&=|d|^2|p-q|^2>0\ (d\neq 0,\ p\neq q)\end{aligned}$$

(1)より，点 z は中心 $-\dfrac{i(\bar{d}q-dp)}{i(d-\bar{d})}=\dfrac{dp-\bar{d}q}{d-\bar{d}}$，半径 $\dfrac{|d||p-q|}{|d-\bar{d}|}$ の円を描く。

［解 説］

複素数平面における円の方程式が題材です。(2)では(1)の利用を考え，計算を少しでも軽減しようとしました。

$\boxed{4\text{b}}$

問題のページへ

(1)　3 回の 3 の目，2 回の 5 の目の以外に，3 以下の目が少なくとも 1 回出たとき $X_4=3$，すべて 4 以上で 4 の目が少なくとも 1 つ出たとき $X_4=4$，すべて 5 以上のとき $X_4=5$ となる。よって，$X_4=\{3,\ 4,\ 5\}$ である。

(2)　$X_1=2$ となるのは，すべて 2 以上で 2 の目が少なくとも 1 回出たときなので,

$$P(X_1=2)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3)　(2)と同様に考えて，$P(X_1=1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$P(X_1=3)=\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n,\ P(X_1=4)=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n$$

$$P(X_1=5)=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n,\ P(X_1=6)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

よって，
$$\begin{aligned}E(X_1)&=1\times\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+2\times\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n\right\}+3\times\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n\right\}\\&\quad+4\times\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}+5\times\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+6\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\\&=1+\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\\&=1+\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{aligned}$$

(4)　$\left(\frac{5}{6}\right)^n<\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n<5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$ なので, (3)より,

$$\log\frac{5}{6}=\frac{1}{n}\log\left(\frac{5}{6}\right)^n<\frac{1}{n}\log(E(X_1)-1)<\frac{1}{n}\log 5\left(\frac{5}{6}\right)^n=\frac{1}{n}\log 5+\log\frac{5}{6}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E(X_1)-1)=\log\frac{5}{6}$

(5)　(3)と同様に考えて，$P(X_n=1)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$，$P(X_n=2)=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$P(X_n=3)=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n,\ P(X_n=4)=\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n$$

$$P(X_n=5)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n,\ P(X_n=6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，
$$\begin{aligned}E(X_n)&=1\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\times\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+3\times\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}\\&\quad+4\times\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n\right\}+5\times\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n\right\}+6\times\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}\\&=6-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{aligned}$$

以上より，$E(X_1+X_n)=E(X_1)+E(X_n)=7$

［解 説］

最大値，最小値の確率を求める有名問題です。確率の部分については，(5)の最後の 1 行以外は数学 I の範囲です。

5a

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(t,\ f(t))$における接線の傾きは$f'(t)$より，$\tan\theta(t)=f'(t)$となる。

$$\frac{1}{\cos^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=f''(t)\ ,\ \ \theta'(t)=f''(t)\cos^2\theta(t)$$

条件より，$f''(t)>0$なので$\theta'(t)>0$，よって$\theta(t)$はつねに増加する。

(2)　①より，接線の方向ベクトルは$(1,\ \tan\theta(t))$とおけるので，下向きの法線ベクトルは$\vec{n}=(\tan\theta(t),\ -1)$となる。

すると，$|\vec{n}|=\sqrt{\tan^2\theta(t)+1}=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta(t)}}=\dfrac{1}{\cos\theta(t)}$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\cos\theta(t)\vec{n}=(t,\ f(t))+\cos\theta(t)(\tan\theta(t),\ -1)$$
$$=(t,\ f(t))+(\sin\theta(t),\ -\cos\theta(t))=(t+\sin\theta(t),\ f(t)-\cos\theta(t))$$

よって，$\alpha(t)=t+\sin\theta(t)$，$\beta(t)=f(t)-\cos\theta(t)$

(3)　(1)より，$1+\{f'(t)\}^2=1+\tan^2\theta(t)=\dfrac{1}{\cos^2\theta(t)}$なので，

$$L_1=\int_a^b\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)}}\,dt=\int_a^b\frac{1}{\cos\theta(t)}\,dt$$

(2)から，$\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2+\{f'(t)+\sin\theta(t)\theta'(t)\}^2$

$$=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2+\{\tan\theta(t)+\sin\theta(t)\theta'(t)\}^2$$
$$=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2\{1+\tan^2\theta(t)\}=\frac{\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}$$

$$L_2=\int_a^b\sqrt{\frac{\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}}\,dt=\int_a^b\frac{1+\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)}\,dt$$

よって，$L_2-L_1=\displaystyle\int_a^b\frac{\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)}\,dt=\int_a^b\theta'(t)\,dt=\Big[\theta(t)\Big]_a^b=\theta(b)-\theta(a)$

［解 説］

ていねいな誘導がついた，よく練られた問題です。(3)の結論は予想以上に簡明なものでした。

$\boxed{5\,\mathrm{b}}$ 問題のページへ

(1) 条件より，$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

また，$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{24-18}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) (1)より，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6p-9q \\ -2p+4q \end{pmatrix}$

$$x = p - \frac{3}{2}q \cdots\cdots\cdots ①,\quad y = -\frac{1}{3}p + \frac{2}{3}q \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，x が整数となる条件は，q が偶数となることであり，$0 \leqq q \leqq 5$ より，$q = 0,\ 2,\ 4$ である。

$q = 0$ のとき，②より $y = -\dfrac{1}{3}p$ となり, y が整数となる条件は p が 3 の倍数である。すなわち, $0 \leqq p \leqq 5$ から $p = 0,\ 3$ である。

$q = 2$ のとき，②より $y = -\dfrac{1}{3}p + \dfrac{4}{3}$ となり, y が整数となる条件は $-p+4$ が 3 の倍数である。すなわち, $0 \leqq p \leqq 5$ から $p = 1,\ 4$ である。

$q = 4$ のとき，②より $y = -\dfrac{1}{3}p + \dfrac{8}{3}$ となり，y が整数となる条件は $-p+8$ が 3 の倍数である。すなわち, $0 \leqq p \leqq 5$ から $p = 2,\ 5$ である。

以上より，$(p,\ q) = (0,\ 0),\ (3,\ 0),\ (1,\ 2),\ (4,\ 2),\ (2,\ 4),\ (5,\ 4)$

(3) ①より $x = \dfrac{2p-3q}{2}$，②より $y = \dfrac{-p+2q}{3}$

$d = 6$ とすると，$2p-3q$ は偶数となり，$-p+2q$ は 3 の倍数となる。このとき, x, y はともに整数であり，題意の正の整数 d は存在する。

(4) 5 以下の d が存在すると仮定する。

ところが，$d = 5$ のときは $(p,\ q) = (5,\ 5)$，$d = 4$ のときは $(p,\ q) = (4,\ 4)$，$d = 3$ のときは $(p,\ q) = (3,\ 3)$，$d = 2$ のときは $(p,\ q) = (2,\ 2)$，$d = 1$ のときは $(p,\ q) = (1,\ 1)$ が, (2)より満たしていないことがわかる。

よって, d のうちで最小のものは 6 である。

［解 説］

(2)からは整数問題になっていますが, $0 \leqq p \leqq 5$, $0 \leqq q \leqq 5$ ととりうる値の範囲が狭いので，そんなに面倒ではありません。