1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　原点を中心とする半径 $r\,(r>0)$ の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は，$ax+by=r^2$ で与えられることを示せ。

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $C : y=x^2+1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これらの接線の方程式を求めよ。

(3)　問(2)における 3 本の接線のうち, x 軸の正の部分と交わる接線を l_1, x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば，$f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので，$f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1)　a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

必要ならば，$1+r+\cdots+r^m=\dfrac{r^{m+1}-1}{r-1}\ (r\neq 1)$ を用いてよい。

(2)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。このとき $f(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3)　$a=2^2r$，$b=2^4s$（$r,\ s$ は正の奇数）の形をした偶数 $a,\ b$ を考える。$f(a)=2b$，$f(b)=2a$ をみたす $a,\ b$ を求めよ。

3a

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) n を正の整数とする。どんな角度θ に対しても,

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また, ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

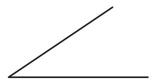
(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数, 奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また, $p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

3b

解答解説のページへ

n を正の整数とする。平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし，1 回折れ線とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。



（1回折れ線）

(1)　平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる。

(ii)　n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

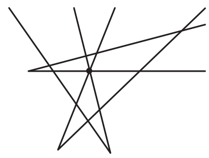
分割される平面の領域の数を L_n で表す。$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また，L_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。

(2)　平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。

(i)　n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

(ii)　n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない(右図を参照せよ)。

分割される平面の領域の数を H_n で表す。H_3 を求めよ。



（同一点で交わる3本の1回折れ線）

(3)　H_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。

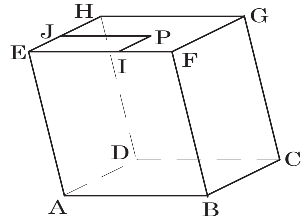
4a

解答解説のページへ

空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) △ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を a, x, y を用いて表せ。



（平行六面体ABCD-EFGH）

(3) 問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。

4b

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　複素数α，β，γ，δは$\alpha \neq \beta$，$\gamma \neq \delta$をみたすとする。複素数平面上の 2 点α，βを通る直線が，2 点γ，δを通る直線と直交するための必要十分条件は，複素数$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$が純虚数であることを示せ。

(2)　複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点z_1，z_2，z_3をとり，$w_1 = z_1 + z_2 + z_3$とおく。点w_1は 3 点z_1，z_2，z_3を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで，三角形の垂心とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これらの 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(3)　問(2)において$w_2 = -\overline{z_1}z_2z_3$とおく。$w_2 \neq z_1$のとき，2 点$z_2$，$z_3$を通る直線上に点$z_1$から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点はw_2であることを示せ。ここで$\overline{z_1}$はz_1に共役な複素数である。

1

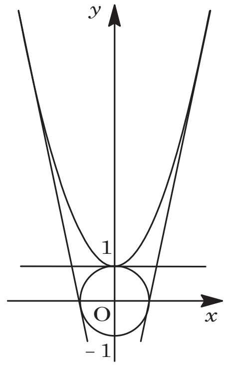
問題のページへ

(1) 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ において，$a^2+b^2=r^2$ ………①

また，この点における接線は，その法線ベクトルの成分を $(a,\ b)$ とすることができるので，

$$a(x-a)+b(y-b)=0,\ ax+by=a^2+b^2$$

①より，$ax+by=r^2$



(2) $x^2+y^2=1$ ……②，$y=x^2+1$ ……③に対して，

③上の接点を $(t,\ t^2+1)$ とおくと，$y'=2x$ より，接線は，

$$y-(t^2+1)=2t(x-t),\ 2tx-y-t^2+1=0 \text{ ………④}$$

②と④が接するので，$\dfrac{|-t^2+1|}{\sqrt{4t^2+1}}=1$

$$(-t^2+1)^2=4t^2+1,\ t^4-6t^2=0,\ t=0,\ \pm\sqrt{6}$$

よって，接線は④より，$y=1$，$y=\pm 2\sqrt{6}\,x-5$ となる。

(3) 2 直線 $y=1$ と $y=2\sqrt{6}\,x-5$ の交点は，$2\sqrt{6}\,x-5=1$ より，$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

求める部分の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}(x^2+1-1)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}(x^2+1-2\sqrt{6}x+5)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}x^2dx+\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}(x-\sqrt{6})^2dx=\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-\sqrt{6})^3\Big]_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

[解 説]

誘導に従って，(1)を用いて(2)を解こうとしましたが，計算が複雑なので止めました。そこで, (1)を無視して普通に解いてみました。

2

問題のページへ

(1)　正の奇数 b の正の約数を小さい方から b_1, b_2, …, b_n とすると, $a=2^m b$ より,

$$f(a)=(1+2+2^2+\cdots+2^m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$=\frac{2^{m+1}-1}{2-1}f(b)=(2^{m+1}-1)f(b)$$

(2)　p は 2 以上の整数より, 少なくとも 1 と p を約数としてもつ。また, q は正の整数より, 少なくとも q を約数としてもつ。すると, $a=pq$ のとき,

$$f(a)\geqq p\times q+1\times q=(p+1)q$$

等号が成立するのは, a が pq と q だけを約数としてもつ場合であり, $p\geqq 2$ より $q=1$ である。すると, $a=p$ は p と 1 だけを約数としてもち, p は素数となる。

(3)　条件より, $a=2^2r$, $b=2^4s$, $f(a)=2b$, $f(b)=2a$ なので,

$$f(2^2r)=2\cdot 2^4s\cdots\cdots\cdots①,\ f(2^4s)=2\cdot 2^2r\cdots\cdots\cdots②$$

(1)を用いると, ①より, $(2^3-1)f(r)=2^5s$, $7f(r)=32s\cdots\cdots\cdots$③

②より, $(2^5-1)f(s)=2^3r$, $31f(s)=8r\cdots\cdots\cdots$④

$f(r)$, $f(s)$ は整数なので, ③より s は 7 の倍数, ④より r は 31 の倍数となる。すなわち, k, l を正の整数として, $s=7k$, $r=31l$ と表すことができ, ③④より,

$$7f(r)=32\cdot 7k,\ f(r)=32k\cdots\cdots\cdots⑤$$
$$31f(s)=8\cdot 31l,\ f(s)=8l\cdots\cdots\cdots⑥$$

一方, (2)より, $f(r)=f(31l)\geqq(31+1)l=32l\cdots\cdots\cdots$⑦

$$f(s)=f(7k)\geqq(7+1)k=8k\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑤⑦より $32k\geqq 32l$ となり $k\geqq l$, ⑥⑧より $8l\geqq 8k$ となり $l\geqq k$, よって $k=l$ である。

すると, ⑤は $f(31k)=(31+1)k$ となり, 31 は素数なので, (2)の等号成立条件から $k=1$ である。

以上より, $s=7$, $r=31$ となり, $a=2^2\cdot 31=124$, $b=2^4\cdot 7=112$ である。

［解 説］

約数全体の和という有名な問題を題材にしてあります。難問ですが, 演習することに価値のある問題です。

$\boxed{3\,\mathrm{a}}$　　問題のページへ

(1)　$n=1$のとき　$2\cos\theta\cdot 1-\cos(-\theta)=2\cos\theta-\cos\theta=\cos\theta$

$n=2$のとき　$2\cos\theta\cos\theta-1=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$

$n\geqq 3$のとき　$2\cos\theta\cos(n-1)\theta-\cos(n-2)\theta$

$$=\cos(n-1+1)\theta+\cos(n-1-1)\theta-\cos(n-2)\theta=\cos n\theta$$

以上より, nを正の整数とするとき,

$$\cos n\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta-\cos(n-2)\theta\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\cos\theta=x$として，ある n 次式$p_n(x)$を用いて，$\cos n\theta=p_n(x)$と表されることを, 数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$のとき

$p_1(x)=x$よりxの 1 次式，$p_2(x)=2x^2-1$よりxの 2 次式として表される。

(ii)　$n=k,\ k+1$のとき

$\cos k\theta=p_k(x)$，$\cos(k+1)\theta=p_{k+1}(x)$と仮定すると，①より,

$$\cos(k+2)\theta=2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta=2x\,p_{k+1}(x)-p_k(x)$$

これより，$\cos(k+2)\theta$はxの$k+2$次式で表される。

(i)(ii)より，$\cos n\theta$はあるn次式$p_n(x)$を用いて$\cos n\theta=p_n(\cos\theta)$と表される。

(2)　(1)より，$p_1(x)=x$，$p_2(x)=2x^2-1$，$p_{n+2}(x)=2x\,p_{n+1}(x)-p_n(x)\ \cdots\cdots\cdots ②$

さて，$p_n(x)$は n が偶数ならば偶関数, 奇数ならば奇関数になることを, 数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$のとき

$p_1(x)=x$より奇関数，$p_2(x)=2x^2-1$より偶関数である。

(ii)　$n=2k-1,\ 2k$のとき

$p_{2k-1}(x)$が奇関数，$p_{2k}(x)$が偶関数であると仮定すると,

$$p_{2k-1}(-x)=-p_{2k-1}(x),\ p_{2k}(-x)=p_{2k}(x)$$

②より，$p_{2k+1}(x)=2x\,p_{2k}(x)-p_{2k-1}(x)$なので,

$$p_{2k+1}(-x)=-2x\,p_{2k}(-x)-p_{2k-1}(-x)=-2xp_{2k}(x)+p_{2k-1}(x)=-p_{2k+1}(x)$$

また，$p_{2k+2}(x)=2x\,p_{2k+1}(x)-p_{2k}(x)$なので,

$$p_{2k+2}(-x)=-2x\,p_{2k+1}(-x)-p_{2k}(-x)=2x\,p_{2k+1}(x)-p_{2k}(x)=p_{2k+2}(x)$$

よって，$p_{2k+1}(x)$は奇関数，$p_{2k+2}(x)$は偶関数となる。

(i)(ii)より，$p_n(x)$はnが偶数ならば偶関数, 奇数ならば奇関数になる。

(3)　まず，$p_n(x)$の定数項をa_nとする。

nが奇数のとき，$p_n(-x)=-p_n(x)$より，$a_n=-a_n$，$a_n=0$

nが偶数のとき，$n=2m$として，②より，$p_{2m+2}(x)=2x\,p_{2m+1}(x)-p_{2m}(x)$

定数項を比較すると，$a_{2m+2}=-a_{2m}$

$a_1=-1$ より，$a_{2m}=-1\cdot(-1)^{m-1}=(-1)^m$

$m=\dfrac{n}{2}$ なので，$a_n=(-1)^{\frac{n}{2}}$

また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を b_n とする。

n が偶数のとき，$p_n(-x)=p_n(x)$ より，$-b_n=b_n$，$b_n=0$

n が奇数のとき，$n=2m-1$ として，②より，$p_{2m+1}(x)=2x\,p_{2m}(x)-p_{2m-1}(x)$

1 次の項の係数を比較すると，$p_{2m}(x)$ の定数項は $(-1)^m$ より，

$$b_{2m+1}=2(-1)^m-b_{2m-1},\ \frac{b_{2m+1}}{(-1)^{m+1}}=\frac{b_{2m-1}}{(-1)^m}-2$$

$b_1=1$ より，$\dfrac{b_{2m-1}}{(-1)^m}=\dfrac{b_1}{(-1)^1}-2(m-1)=-(2m-1)$

$$b_{2m-1}=-(2m-1)(-1)^m$$

$m=\dfrac{n+1}{2}$ なので，$b_n=-n(-1)^{\frac{n+1}{2}}$

［解 説］

有名な問題です。ただ，問題量がたいへん多く，かなりの時間を費やしてしまいます。

3b　　　　問題のページへ

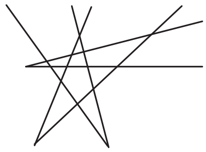
(1)　$n-1$ 本の直線で平面が L_{n-1} 個の領域に分割されているとき，条件をみたす直線を 1 本引くと，新たに $n-1$ 個の交点ができ，それによって分割される平面が n 個増える。

$$L_n = L_{n-1} + n \quad (n \geqq 2)$$

$L_1 = 2$ より，$L_n = 2 + (2+3+\cdots+n) = 2 + \dfrac{2+n}{2}\cdot(n-1) = \dfrac{n^2+n+2}{2}$

$n=1$ をあてはめると，$L_1 = 2$ となり成立するので，$L_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$　$(n \geqq 1)$

(2)　$H_1 = 2$ で，条件をみたす 1 回折れ線を 1 本引くと，交点が 4 個でき，それによって分割される平面が $4+1=5$ 個増える。



$$H_2 = H_1 + 5 = 7$$

さらに，条件をみたす 1 回折れ線をもう 1 本引くと，交点が $4\times 2 = 8$ 個でき，それによって分割される平面が $8+1=9$ 個増える。

$$H_3 = H_2 + 9 = 16$$

(3)　(2)と同様に考えて，$n-1$ 本の 1 回折れ線で平面が H_{n-1} 個の領域に分割されているとき，条件をみたす 1 回折れ線を 1 本引くと，新たに $4(n-1)$ 個の交点ができ，それによって分割される平面が $4(n-1)+1 = 4n-3$ 個増える。

$$H_n = H_{n-1} + 4n - 3 \quad (n \geqq 2)$$

$H_1 = 2$ より，$H_n = 2 + (5+9+\cdots+4n-3) = 2 + \dfrac{5+4n-3}{2}\cdot(n-1) = 2n^2 - n + 1$

$n=1$ をあてはめると，$H_1 = 2$ となり成立するので，$H_n = 2n^2 - n + 1$　$(n \geqq 1)$

［解　説］

(1)は参考書などによく載っている問題です。(2)と(3)はこの類題で，見かけに反して，標準的な内容です。

4a

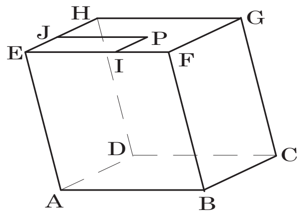
問題のページへ

(1)　$\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin A=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2 A}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2(1-\cos^2 A)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

(2)　条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=1\cdot 2a\cos 120^\circ=-a$$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y^2|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2$$

$$+2xy\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2y\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+2x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$=x^2+y^2+4a^2-2ax$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+y|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$=x-a+y$$

そこで，$\triangle\mathrm{ACP}$ の面積を S とすると，(1)より，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2+4a^2-2ax)-(x-a+y)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2xy+y^2-2ax+2ay+7a^2}$$

(3)　$P=x^2-2xy+y^2-2ax+2ay+7a^2$ とおくと，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{P}$ となる。

さて，$x-y=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であり，

$$P=(x-y)^2-2a(x-y)+7a^2=(x-y-a)^2+6a^2=(t-a)^2+6a^2$$

(i)　$0<a\leqq 1$ のとき

P は $t=a$ で最小値 $6a^2$ をとり，このとき S も最小となり，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{6a^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

(ii)　$a>1$ のとき

P は $t=1$ で最小値 $1-2a+7a^2$ をとり，このとき S も最小となり，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{1-2a+7a^2}$$

［解 説］

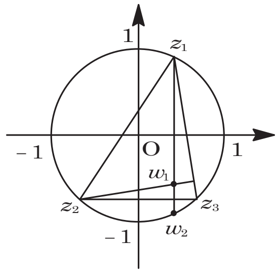
空間ベクトルについての標準的な問題です。(3)は 1 文字を固定して，2 次関数として最小値を求める問題かとも思いましたが，式の特徴を利用すると，その必要はありませんでした。

4b　問題のページへ

(1)　2 点α，βを通る直線が, 2 点γ，δを通る直線と直交する条件は,

$$\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\pm 90^\circ$$

よって，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$は純虚数である。



(2)　まず, 3 点z_1，z_2，z_3は原点中心で半径 1 の円 C 上にあるので,

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$

すると，$\dfrac{w_1-z_1}{z_2-z_3}=\dfrac{z_2+z_3}{z_2-z_3}=\dfrac{(z_2+z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}{(z_2-z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$

$$=\frac{|z_2|^2-z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3-|z_3|^2}{|z_2-z_3|^2}=\frac{-z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3}{|z_2-z_3|^2}$$

ここで，$u=-z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3$とおくと，$\overline{u}=-\overline{z_2}z_3+z_2\overline{z_3}$となり，$\overline{u}=-u$である。よって, uは純虚数となるので，$\dfrac{w_1-z_1}{z_2-z_3}$も純虚数である。

(1)より, 2 点z_1，w_1を通る直線と 2 点z_2，z_3を通る直線は直交する。

同様にして，$\dfrac{w_1-z_2}{z_3-z_1}=\dfrac{z_3+z_1}{z_3-z_1}$も純虚数となり，2 点$z_2$，$w_1$を通る直線と 2 点$z_1$，$z_3$を通る直線は直交する。

以上より，点w_1は 3 点z_1，z_2，z_3を頂点とする三角形の垂心である。

(3)　$\dfrac{w_2-z_1}{z_2-z_3}=\dfrac{-\overline{z_1}z_2z_3-z_1}{z_2-z_3}=-\dfrac{(\overline{z_1}z_2z_3+z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}{(z_2-z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$

$$=-\frac{\overline{z_1}|z_2|^2z_3-\overline{z_1}z_2|z_3|^2+z_1\overline{z_2}-z_1\overline{z_3}}{|z_2-z_3|^2}=-\frac{\overline{z_1}z_3-\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}-z_1\overline{z_3}}{|z_2-z_3|^2}$$

ここで，$v=\overline{z_1}z_3-\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}-z_1\overline{z_3}$とおくと，$\overline{v}=z_1\overline{z_3}-z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-\overline{z_1}z_3$となり，$\overline{v}=-v$である。よって, vは純虚数となるので，$\dfrac{w_2-z_1}{z_2-z_3}$も純虚数である。

(1)より, 2 点z_1，w_2を通る直線と 2 点z_2，z_3を通る直線は直交する。

また，$|w_2|=|-\overline{z_1}z_2z_3|=|-\overline{z_1}||z_2||z_3|=1$より，点$w_2$は円$C$上にある。

以上より，$w_2\neq z_1$のとき，点w_2は，2 点z_2，z_3を通る直線上に点z_1から下ろした垂線またはその延長線が円Cと交わる点である。

[解 説]

文字が多いので計算は複雑ですが，方針に迷いが生じることはありません。