1

解答解説のページへ

平面上を運動する点$\mathrm{P}(x,\ y)$の時刻tでのx座標とy座標が

$$x=\frac{e^t-e^{-t}}{2},\quad y=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

で表されている。ただし，eは自然対数の底である。原点をO，点$(0,\ 1)$をMとする。tが$t\geqq 0$の範囲で変化したとき，点Pが描く曲線をCとする。時刻tにおいて，曲線C，線分OM，および線分OPで囲まれる図形の面積を$A(t)$で表し，曲線Cと線分MPで囲まれる図形の面積を$S(t)$で表す。次の問いに答えよ。

(1)　点$\mathrm{P}(x,\ y)$の座標x, yに対してyをxを用いて表せ。

(2)　時刻tを用いて$A(t)$と$S(t)$を表せ。

(3)　$A(t)-S(t)$が最大となる時刻tを求めよ。

2

解答解説のページへ

正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば，$f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので，$f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1)　a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

(2)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。このとき $f(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3)　正の偶数 a, b は，ある整数 m, n とある奇数 r, s を用いて $a=2^m r$，$b=2^n s$ のように表すことができる。このとき a, b が $f(a)=2b$，$f(b)=2a$ をみたせば，r, s は素数であり，かつ $r=2^{n+1}-1$，$s=2^{m+1}-1$ となることを示せ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　すべての正の実数 x, y に対して，不等式 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ が成り立つことを示せ。ここで $\log$ は自然対数を表す。

(2)　a, b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で，$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3)　a, b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。

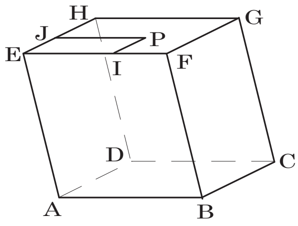
4 a

解答解説のページへ

空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) △ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) 右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAB}=\theta$ とする。ここで θ は $0<\theta<\pi$ なる定数とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を θ，x，y を用いて表せ。



（平行六面体ABCD-EFGH）

(3) 問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。

4b

解答解説のページへ

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとる。次の問いに答えよ。

(1)　$w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで，三角形の垂心とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これらの 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(2)　$w_2 = -\overline{z_1}z_2z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z_1}$ は z_1 に共役な複素数である。

(3)　2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ。ただし，$w_1 = w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する。

5a

解答解説のページへ

平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ を用いて，

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta$$

と表されている。θ が $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(0)$，$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる（ただし楕円の上にない）ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 次の条件(i)(ii)(iii)をみたす楕円 D を考える。

(i) D の軸の 1 つは x 軸上にある。

(ii) D は点 P_1，P_2 を通る。

(iii) 点 P_2 における D の接線は l である。

このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。

5b　　　解答解説のページへ

2 次の正方行列 A が零行列でなく $A^2=A$ をみたすとき，べき等行列という。次の問いに答えよ。

(1)　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はべき等行列であり，かつ $ad-bc\neq 0$ とする。このとき，A を求めよ。

(2)　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad-bc=0$ をみたすとする。このとき，A がべき等行列であるための必要十分条件を a と d のみを用いて表せ。

(3)　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ はともにべき等行列とする。$A+B$ がべき等行列になるとき，$A+B$ を求めよ。また，そのような A, B の組を 1 つあげよ。

1

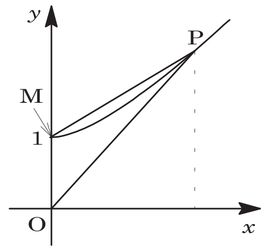
問題のページへ

(1)　$x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ ……①，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ ……②に対して

①＋②より $e^t=x+y$ ……③，①－②より $-e^{-t}=x-y$ ……④なので，

$-1=(x+y)(x-y)$，$x^2-y^2=-1$，$y^2=x^2+1$

②より，$y>0$ なので，$y=\sqrt{x^2+1}$



(2)　$t\geqq 0$ のとき，$e^t\geqq 1$ なので，

③より $x+y\geqq 1$，④より $-1\leqq x-y<0$

$y\geqq -x+1$，$x<y\leqq x+1$

よって曲線を C は，$y=\sqrt{x^2+1}\ (x\geqq 0)$

すると，$A(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}$

$\qquad=\displaystyle\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx-\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})$

ここで，$x=\dfrac{e^u-e^{-u}}{2}$ とおくと，$dx=\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}du$ より，

$$\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^t\frac{e^u+e^{-u}}{2}\cdot\frac{e^u+e^{-u}}{2}du=\frac{1}{4}\int_0^t(e^{2u}+2+e^{-2u})du$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u}\Big]_0^t=\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})+\frac{1}{2}t$$

よって，$A(t)=\dfrac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})=\dfrac{1}{2}t$

また，$S(t)=\triangle\mathrm{OMP}-A(t)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}-\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})-\dfrac{1}{2}t$

(3)　$A(t)-S(t)=F(t)$ とおくと，$F(t)=\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})+\dfrac{1}{2}t=t-\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})$

$F'(t)=1-\dfrac{1}{4}(e^t+e^{-t})$

$\qquad=-\dfrac{e^{2t}-4e^t+1}{4e^t}$

t	0	…	$\log(2+\sqrt{3})$	…
$F'(t)$		＋	0	－
$F(t)$		↗		↘

$F'(t)=0$ とすると，$e^t=2\pm\sqrt{3}$

$e^t\geqq 1$ なので $e^t=2+\sqrt{3}$，$t=\log(2+\sqrt{3})$

よって，右表より，$t=\log(2+\sqrt{3})$ のとき，$F(t)$ は最大となる。

［解 説］

置換積分によって面積を求める頻出問題です。今年の筑波大でも，双曲線を題材とした類題が出ています。

2

問題のページへ

(1)　正の奇数 b の正の約数を小さい方から b_1，b_2，…，b_n とすると，$a = 2^m b$ より，

$$f(a) = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} f(b) = (2^{m+1} - 1) f(b)$$

(2)　p は 2 以上の整数より，少なくとも 1 と p を約数としてもつ。また，q は正の整数より，少なくとも q を約数としてもつ。すると，$a = pq$ のとき，

$$f(a) \geqq p \times q + 1 \times q = (p + 1)q$$

等号が成立するのは，a が pq と q だけを約数としてもつ場合であり，$p \geqq 2$ より $q = 1$ である。すると，$a = p$ は p と 1 だけを約数としてもち, p は素数となる。

(3)　$a = 2^m r$，$b = 2^n s$ で, a, b は正の偶数, r, s は奇数より, $m \geqq 1$, $n \geqq 1$ である。

条件より，$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ なので，

$$f(2^m r) = 2 \cdot 2^n s \cdots\cdots\cdots ①,\quad f(2^n s) = 2 \cdot 2^m r \cdots\cdots\cdots ②$$

(1)を用いると，①より，$(2^{m+1} - 1) f(r) = 2^{n+1} s \cdots\cdots\cdots ③$

②より，$(2^{n+1} - 1) f(s) = 2^{m+1} r \cdots\cdots\cdots ④$

さて，$f(r)$，$f(s)$ は整数で，2^{m+1}，2^{n+1} は偶数，$2^{m+1} - 1$，$2^{n+1} - 1$ は奇数なので, ③より s は $2^{m+1} - 1$ の倍数, ④より r は $2^{n+1} - 1$ の倍数となる。すなわち, k, l を正の整数として，$s = (2^{m+1} - 1)k$，$r = (2^{n+1} - 1)l$ と表すことができる。

③より，$(2^{m+1} - 1) f(r) = 2^{n+1}(2^{m+1} - 1)k$，$f(r) = 2^{n+1} k \cdots\cdots\cdots ⑤$

④より，$(2^{n+1} - 1) f(s) = 2^{m+1}(2^{n+1} - 1)l$，$f(s) = 2^{m+1} l \cdots\cdots\cdots ⑥$

一方, (2)より，$f(r) = f((2^{n+1} - 1)l) \geqq (2^{n+1} - 1 + 1)l = 2^{n+1} l \cdots\cdots\cdots ⑦$

$$f(s) = f((2^{m+1} - 1)k) \geqq (2^{m+1} - 1 + 1)k = 2^{m+1} k \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑤⑦より $2^{n+1} k \geqq 2^{n+1} l$ となり $k \geqq l$，⑥⑧より $2^{m+1} l \geqq 2^{m+1} k$ となり $l \geqq k$，よって $k = l$ である。

すると，⑤⑥より，$f((2^{n+1} - 1)k) = (2^{n+1} - 1 + 1)k$

$$f((2^{m+1} - 1)k) = (2^{m+1} - 1 + 1)k$$

ここで，$2^{m+1} - 1 \geqq 3$，$2^{n+1} - 1 \geqq 3$ なので，(2)の等号成立条件から，$2^{m+1} - 1$，$2^{n+1} - 1$ は素数で，$k = 1$ となる。

以上より，$r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となり，ともに素数である。

［解 説］

約数全体の和という有名な問題を題材にした難問です。文系に $m = 2$，$n = 4$ の場合が出題されています。

3

問題のページへ

(1) $x>0,\ y>0$ に対して，$t=\dfrac{x}{y}>0$ とおくと，

$$x\log x-x\log y-x+y\geqq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{y}\log\frac{x}{y}-\frac{x}{y}+1\geqq 0\ \Leftrightarrow\ t\log t-t+1\geqq 0$$

ここで，$h(t)=t\log t-t+1$ とおくと，

$$h'(t)=\log t+t\cdot\frac{1}{t}-1=\log t$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$		↘	0	↗

右表より, $t>0$ のとき，$h(t)\geqq 0$ となる。

よって，$x\log x-x\log y-x+y\geqq 0$ ………①

(2) 区間 $[a,\ b]$ において，$f(x)>0$，$g(x)>0$ なので，①より，

$$f(x)\log f(x)-f(x)\log g(x)-f(x)+g(x)\geqq 0$$

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\log g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ ……②なので，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq\int_a^b f(x)\log g(x)\,dx\ \cdots\cdots\cdots③$$

(3) $M=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)M=\int_a^b M\,dx$ ………④

これより，$g(x)=M$ とおくと，②をみたすので，③より，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq\int_a^b f(x)\log M\,dx=\log M\int_a^b f(x)\,dx$$

④の関係から，$\displaystyle\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq(b-a)M\log M$ となり，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq M\log M$$

［解 説］

(1)から(2)へはスムーズに流れ，(2)から(3)へはちょっと引っかかるという，うまい誘導がついています。

4a

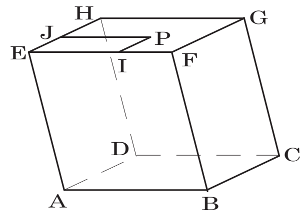
問題のページへ

(1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sqrt{1-\cos^2 A}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(1-\cos^2 A)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

(2) 条件より，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$|\overrightarrow{AE}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=1\cdot 2\cos\theta=2\cos\theta$$



ここで，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2=2$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2=x^2|\overrightarrow{AB}|^2+y^2|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AE}|^2+2xy\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2y\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+2x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$$

$$=x^2+y^2+4+4x\cos\theta$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+y|\overrightarrow{AD}|^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$$

$$=x+2\cos\theta+y$$

そこで，$\triangle$ACP の面積を S とすると，(1)より，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2+4+4x\cos\theta)-(x+2\cos\theta+y)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2xy+y^2+4x\cos\theta-4y\cos\theta+8-4\cos^2\theta}$$

(3) $P=x^2-2xy+y^2+4x\cos\theta-4y\cos\theta+8-4\cos^2\theta$ とおくと，$S=\frac{1}{2}\sqrt{P}$ となる。

さて，$x-y=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であり，

$$P=(x-y)^2+4(x-y)\cos\theta+8-4\cos^2\theta=t^2+4t\cos\theta+8-4\cos^2\theta$$

$$=(t+2\cos\theta)^2+8-8\cos^2\theta=(t+2\cos\theta)^2+8\sin^2\theta$$

(i) $-2\cos\theta<-1\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$ のとき　P は $t=-1$ で最小となる。

このとき，S は最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{9-4\cos\theta-4\cos^2\theta}$ をとる。

(ii) $-1\leqq -2\cos\theta\leqq 1\ \left(\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{3}\right)$ のとき　P は $t=-2\cos\theta$ で最小となる。

このとき，S は最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{8\sin^2\theta}=\sqrt{2}\sin\theta$ をとる。

(iii) $-2\cos\theta>1\ \left(\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi\right)$ のとき　P は $t=1$ で最小となる。

このとき，S は最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{9+4\cos\theta-4\cos^2\theta}$ をとる。

[解 説]

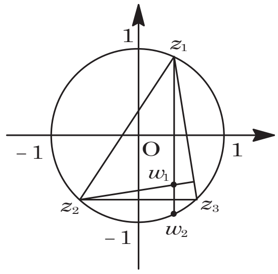
(3)は 1 文字を固定して，2 次関数として最小値を求める問題かとも思いましたが，式の特徴を利用すると，その必要はありませんでした。

$\boxed{4\text{b}}$

問題のページへ

(1)　まず, 3 点 z_1，z_2，z_3 は原点中心で半径 1 の円 C 上にあるので,

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$



すると，$\dfrac{w_1-z_1}{z_2-z_3}=\dfrac{z_2+z_3}{z_2-z_3}=\dfrac{(z_2+z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}{(z_2-z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$

$$=\frac{|z_2|^2-z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3-|z_3|^2}{|z_2-z_3|^2}$$

$$=\frac{-z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3}{|z_2-z_3|^2}$$

ここで，$u=-z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3$ とおくと，$\overline{u}=-\overline{z_2}z_3+z_2\overline{z_3}$ となり，$\overline{u}=-u$ である。すなわち, u は純虚数となるので，$\dfrac{w_1-z_1}{z_2-z_3}$ も純虚数である。

よって, 2 点 z_1，w_1 を通る直線と 2 点 z_2，z_3 を通る直線は直交する。

同様にして，$\dfrac{w_1-z_2}{z_3-z_1}=\dfrac{z_3+z_1}{z_3-z_1}$ も純虚数となり，2 点 z_2，w_1 を通る直線と 2 点 z_1，z_3 を通る直線は直交する。

以上より，点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心である。

(2)　$\dfrac{w_2-z_1}{z_2-z_3}=\dfrac{-\overline{z_1}z_2z_3-z_1}{z_2-z_3}=-\dfrac{(\overline{z_1}z_2z_3+z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}{(z_2-z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$

$$=-\frac{\overline{z_1}|z_2|^2z_3-\overline{z_1}z_2|z_3|^2+z_1\overline{z_2}-z_1\overline{z_3}}{|z_2-z_3|^2}=-\frac{\overline{z_1}z_3-\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}-z_1\overline{z_3}}{|z_2-z_3|^2}$$

ここで，$v=\overline{z_1}z_3-\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}-z_1\overline{z_3}$ とおくと，$\overline{v}=z_1\overline{z_3}-z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-\overline{z_1}z_3$ となり，$\overline{v}=-v$ である。すなわち, v は純虚数となるので，$\dfrac{w_2-z_1}{z_2-z_3}$ も純虚数である。

よって, 2 点 z_1，w_2 を通る直線と 2 点 z_2，z_3 を通る直線は直交する。

また，$|w_2|=|-\overline{z_1}z_2z_3|=|-\overline{z_1}||z_2||z_3|=1$ より，点 w_2 は円 C 上にある。

以上より，$w_2\neq z_1$ のとき，点 w_2 は，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点である。

(3)　点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点を w とすると,

$$w=\frac{w_1+w_2}{2}=\frac{z_1+z_2+z_3-\overline{z_1}z_1z_1}{2}$$

さて，$\dfrac{w-z_3}{z_2-z_3}=\dfrac{z_1+z_2-z_3-\overline{z_1}z_2z_3}{2(z_2-z_3)}=\dfrac{(z_1+z_2-z_3-\overline{z_1}z_2z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}{2(z_2-z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$

$$=\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-z_2\overline{z_3}-\overline{z_2}z_3-z_1\overline{z_3}-\overline{z_1}z_3+2}{2|z_2-z_3|^2}$$

ここで，$t=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-z_2\overline{z_3}-\overline{z_2}z_3-z_1\overline{z_3}-\overline{z_1}z_3$ とおくと,

$$\bar{t} = \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} - \overline{z_2}z_3 - z_2\overline{z_3} - \overline{z_1}z_3 - z_1\overline{z_3}$$

これより $\bar{t} = t$，すなわち t は実数となるので，$\dfrac{w - z_3}{z_2 - z_3}$ も実数である。

よって，点 w は 2 点 z_2，z_3 を通る直線上にある。

以上より，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点は，2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点である。

［解 説］

複素数平面上で 2 直線の直交条件と共線条件を題材にした問題です。文字が多いので，計算は複雑です。

5a　　問題のページへ

(1)　$f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ より，$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$，$f(\pi)=\dfrac{1}{2}$

まず，$\mathrm{P}(0)=(f(0),\ 0)=(1,\ 0)$ より，$\mathrm{P}_1(1,\ 0)$ である。

点 P_1 が $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ……①上にあるので，

$$\frac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots\text{②}$$

また，$\mathrm{P}(\pi)=(-f(\pi),\ 0)=\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ より，$\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ である。

点 P_3 が①の内部に含まれる条件は，$\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<1$ ………③

②より $\dfrac{\beta^2}{b^2}=1-\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}$ となり，③に代入して，$\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+1-\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}<1$

$$\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2-(1-\alpha)^2<0,\ \frac{1}{2}-2\alpha>0,\ \alpha<\frac{1}{4}$$

(2)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(0,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ より，$\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ である。

また，条件より，$\dfrac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$

さて，$f'(\theta)=\dfrac{\theta-\pi}{\pi^2}$ より $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2\pi}$ なので，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{5}{8},\ \frac{dy}{d\theta}=-\frac{1}{2\pi},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=\frac{4}{5\pi}\ \cdots\cdots\text{④}$$

よって，点 P_2 における曲線 C の接線は，$y=\dfrac{4}{5\pi}x+\dfrac{5}{8}$

(3)　条件(i)より，楕円 D は，$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………⑤

条件(ii)より，⑤上に点 P_1，P_2 があるので，

$$\frac{(1-\alpha)^2}{a^2}=1\ \cdots\cdots\text{⑥},\ \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{25}{64b^2}=1\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

また，⑤より $\dfrac{2(x-\alpha)}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2(x-\alpha)}{a^2y}$ なので，点 $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ における接線の傾きは，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8b^2\alpha}{5a^2}$ となる。

条件(iii)より，これが④と一致するので，$\dfrac{8b^2\alpha}{5a^2}=\dfrac{4}{5\pi}$，$a^2=2\pi b^2\alpha$ ………⑧

⑥⑧より，$(1-\alpha)^2=2\pi b^2\alpha$ ………⑨

⑦⑧より，$\dfrac{\alpha}{2\pi b^2}+\dfrac{25}{64b^2}=1$，$b^2=\dfrac{\alpha}{2\pi}+\dfrac{25}{64}$ ………⑩

⑨⑩より，$(1-\alpha)^2=2\pi\alpha\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}+\dfrac{25}{64}\right)$，$\left(\dfrac{25}{32}\pi+2\right)\alpha=1$となり，

$$\alpha=\frac{32}{25\pi+64}<\frac{32}{25\times3+64}=\frac{32}{139}<\frac{32}{128}=\frac{1}{4}$$

よって, (1)より，点P_3は楕円Dの内部に含まれる。

［解 説］

パラメータ曲線や楕円の問題というよりは，連立式の処理問題という感じでした。計算量がたいへん多く，疲れます。

5b

問題のページへ

(1)　行列Aはべき等行列なので，$A^2=A$………①

$ad-bc\neq 0$より，A^{-1}が存在するので，①より，

$$A^{-1}A^2=A^{-1}A\ ,\ \ A=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(2)　$ad-bc=0$のとき，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$A^2-(a+d)A=O\text{………②}$$

①②より，$A-(a+d)A=O$，$(1-a-d)A=O$

$A\neq O$なので，$1-a-d=0$，$a+d=1$

(3)　$A+B$がべき等行列なので，$(A+B)^2=A+B$

$$A^2+AB+BA+B^2=A+B$$

行列A, Bもべき等行列なので，$A^2=A$，$B^2=B$となり，

$$AB+BA=O\text{………③}$$

さて，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\neq O$，$B=\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}\neq O$に対し，$A+B=\begin{pmatrix}a+e&b+f\\c+g&d+h\end{pmatrix}$

(i)　$ad-bc\neq 0$，$eh-fg\neq 0$のとき

(1)より$A=B=E$となるので，③は$2E=O$となり，成立しない。

(ii)　$ad-bc\neq 0$，$eh-fg=0$のとき

(1)より$A=E$となるので，③は$2B=O$となり，成立しない。

(iii)　$ad-bc=0$，$eh-fg\neq 0$のとき

(1)より$B=E$となるので，③は$2A=O$となり，成立しない。

(iv)　$ad-bc=0$，$eh-fg=0$のとき

(2)より，$a+d=1$，$e+h=1$となるので，$(a+e)+(d+h)=2\neq 1$

よって，$(A+B)^{-1}$が存在することになり，このとき(1)より，

$$A+B=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

この関係をみたす行列A, Bの１例は，$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$である。

［解 説］

(1)(2)の誘導に従って，(3)も行列式が 0 か 0 でないかに注目して場合分けをしました。ところが，(iv)の場合で行き詰まってしまい，行列式でなくトレースが 1 か 2 かということに注目すべきだったのに気付きました。