1

解答解説のページへ

実数 a, c を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + c$ について，次の条件を考える。

(＊)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成立する。

(1)　$a \geqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2)　$a \leqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が条件(＊)を満たしているとき，定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a，c と，そのときの定積分の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上で，不等式

$$2|x-4|+|y-5|\leqq 3,\ 2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$$

が表す領域を，それぞれ A, B とする。

(1)　領域 A を図示せよ。

(2)　領域 B を図示せよ。

(3)　領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

$\boxed{3a}$

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a>0$ とする。$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。実数 p に対し，x の関数 $px-f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1) 2 つの関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ。

(2) 実数 x に対し, p の関数 $xp-g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。$h(x)$ を求めよ。

(3) 直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ であることを示せ。

3b

解答解説のページへ

$\{m_k\}$を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し，点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を l_k とし，この直線と C とのもう 1 つの交点を P_{k+1} とする。ただし，C と l_k が接する場合は $\mathrm{P}_{k+1}=\mathrm{P}_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

(1)　a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。

(2)　数列$\{a_k\}$の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ。

(3)　$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ とする。このとき，ある 2 次関数 $y=bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 l_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ。ただし，$m_1\neq 0$，$r\neq -1$，0 とする。

4a

解答解説のページへ

空間内に四面体 OABC があり$\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA はすべて90°であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA, $\angle$OGB, $\angle$OGC がすべて90°であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を$1:2$に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{\textbf{4b}}$

解答解説のページへ

$0<a<1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z=t+ai$ (t は実数全体を動く)が表す直線を l とする。ただし，i は虚数単位である。

(1)　複素数 z が l 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2)　直線 l を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と(1)で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ で，$f(x)\geqq(x+1)^2$ より，$(a-1)x^2-2x+(c-1)\geqq 0$

$g(x)=(a-1)x^2-2x+(c-1)$ とおくと, $a\geqq 2$ から $a-1\geqq 1$ であり,

$$g(x)=(a-1)\Big(x-\frac{1}{a-1}\Big)^2-\frac{1}{a-1}+c-1$$

ここで, $a\geqq 2$ から $0<\dfrac{1}{a-1}\leqq 1$ なので，条件(＊)は,

$$g\Big(\frac{1}{a-1}\Big)=-\frac{1}{a-1}+c-1\geqq 0,\ \ c\geqq\frac{1}{a-1}+1=\frac{a}{a-1}$$

よって，条件(＊)を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ である。

(2)　(i)　$1<a\leqq 2$ のとき　$a-1>0$，$\dfrac{1}{a-1}\geqq 1$ より，条件(＊)は,

$$g(1)=a-1-2+c-1\geqq 0,\ \ c\geqq 4-a$$

(ii)　$a=1$ のとき　$g(x)=-2x+(c-1)$ より，条件(＊)は,

$$g(1)=-2+c-1\geqq 0,\ \ c\geqq 3$$

(iii) $a<1$ のとき　$a-1<0$，$\dfrac{1}{a-1}<0$ より，条件(＊)は,

$$g(1)=a-1-2+c-1\geqq 0,\ \ c\geqq 4-a$$

(i)(ii)(iii)より，いずれの場合も，条件(＊)を満たす最小の c の値は $4-a$ である。

(3)　$I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(ax^2+c)\,dx=\frac{a}{3}+c$ なので,

(i)$a\geqq 2$ のとき　(1)より，$c\geqq\dfrac{a}{a-1}$ なので,

$$I\geqq\frac{a}{3}+\frac{a}{a-1}=\frac{a^2+2a}{3(a-1)}=\frac{1}{3}\Big(a+3+\frac{3}{a-1}\Big)=\frac{1}{3}\Big(a-1+\frac{3}{a-1}+4\Big)$$

ここで，相加・相乗平均の関係から，$a-1+\dfrac{3}{a-1}\geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\dfrac{3}{a-1}}=2\sqrt{3}$

等号は $a-1=\dfrac{3}{a-1}$，すなわち $(a-1)^2=3$，$a=1+\sqrt{3}$ のときに成立する。

よって，$I\geqq\dfrac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)$ となる。

(ii)　$a\leqq 2$ のとき　(2)より，$c\geqq 4-a$ なので,

$$I\geqq\frac{a}{3}+4-a=-\frac{2}{3}a+4\geqq-\frac{2}{3}\cdot 2+4=\frac{8}{3}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)<\dfrac{8}{3}$ から, I の最小値は $\dfrac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)$ である。

このとき，$a=1+\sqrt{3}$，$c=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

［解 説］

計算量は多いのですが，内容は基本事項の組合せです。

© 電送数学舎 2003

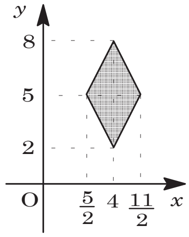
2

問題のページへ

(1) 不等式 $2|x|+|y|\leqq 3$ ……①の表す領域は，4 点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，$(0,\ 3)$，$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，$(0,\ -3)$ を結んでできるひし形の内部または辺上である。

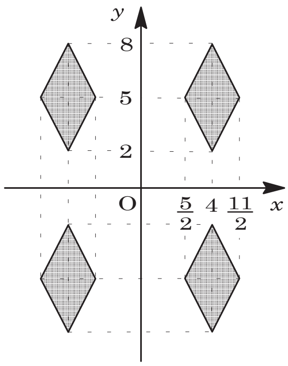
これより，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$ ……②の表す領域は，①の領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものである。

これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(2) 不等式 $2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$ ……③の表す領域は，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のときは②と一致し，$x<0$，$y\geqq 0$ のときは②を y 軸対称したもの，$x<0$，$y<0$ のときは②を原点対称したもの，$x\geqq 0$，$y<0$ のときは②を x 軸対称したものである。

これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(3) $\log_x|y|$ が有理数，すなわち $\log_x|y|=\frac{q}{p}$ となる条件は，$x^{\frac{q}{p}}=|y|$，$x^q=|y|^p$ となる整数 p, q が存在することである。

さて，$x>0$，$y>0$ では，領域内の格子点は，$x=3$ のとき，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$ であるが，いずれも $3^q=y^p$ は成立しない。

$x=4$ のとき，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(4,\ 7)$，$(4,\ 8)$ であるが，$4^q=y^p$ が成立するのは $(4,\ 2)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 8)$ の場合である。

また，$x=5$ のとき，$(5,\ 4)$，$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$ であるが，$5^q=y^p$ が成立するのは $(5,\ 5)$ の場合だけである。

よって，$y<0$ のときも考え合わせると，求める点は，$(4,\ \pm 2)$，$(4,\ \pm 4)$，$(4,\ \pm 8)$，$(5,\ \pm 5)$ となる。

［解 説］

いきなり不等式③の領域を図示するのは難しいので，(1)が誘導となっています。なお，不等式①の領域については，場合分けなどのプロセスを省き，結果だけを述べています。

© 電送数学舎 2003

$\boxed{3a}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ で，$F(x)=px-f(x)$ とおくと，

$$F(x)=-ax^2+(p-b)x-c=-a\left(x-\frac{p-b}{2a}\right)^2+\frac{(p-b)^2}{4a}-c$$

$a>0$ より，$F(x)$ の最大値 $g(p)$ は，$g(p)=\dfrac{(p-b)^2}{4a}-c$ である。

$$g(x)=\frac{(x-b)^2}{4a}-c=\frac{1}{4a}x^2-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c$$

条件より，$f(x)=g(x)$ なので，

$$a=\frac{1}{4a}\cdots\cdots\cdots①,\ b=-\frac{b}{2a}\cdots\cdots\cdots②,\ c=\frac{b^2}{4a}-c\cdots\cdots\cdots③$$

①より，$4a^2=1$, $a>0$ から $a=\dfrac{1}{2}$

②に代入して，$b=-b$ から $b=0$，③に代入して，$c=-c$ から $c=0$

よって，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ となる。

(2)　$G(p)=xp-g(p)$ とおくと，

$$G(p)=-\frac{1}{4a}p^2+\left(\frac{b}{2a}+x\right)p-\frac{b^2}{4a}+c=-\frac{1}{4a}\{p-(b+2ax)\}^2+ax^2+bx+c$$

よって，$G(p)$ の最大値 $h(x)$ は，$h(x)=ax^2+bx+c$ である。

(3)　直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接する条件は，

$$pt+q=f(t)\cdots\cdots\cdots④,\ p=f'(t)\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$p=2at+b$，$t=\dfrac{p-b}{2a}\cdots\cdots\cdots⑥$

⑥を④に代入して，$p\cdot\dfrac{p-b}{2a}+q=a\cdot\dfrac{(p-b)^2}{4a^2}+b\cdot\dfrac{p-b}{2a}+c$

$$q=\frac{(p-b)^2}{4a}+(b-p)\frac{p-b}{2a}+c=-\frac{(p-b)^2}{4a}+c=-g(p)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦を④に代入すると，$pt-g(p)=f(t)\cdots\cdots\cdots⑧$

よって，④かつ⑤は，⑦かつ⑧と同値なので，求める条件は，$g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ となる。

[解　説]

(3)の解は，(1)と(2)の結果を無視しています。何らかの関係があるとは思ったものの，まずは解いてからと考えたからです。

© 電送数学舎 2003

$\boxed{3\text{b}}$ 問題のページへ

(1) $\mathrm{P}_k(a_k,\ {a_k}^2)$，$\mathrm{P}_{k+1}(a_{k+1},\ {a_{k+1}}^2)$を結ぶ直線の傾き$m_k$は，$a_{k+1}\neq a_k$のとき，

$$\frac{{a_{k+1}}^2-{a_k}^2}{a_{k+1}-a_k}=m_k,\ a_{k+1}+a_k=m_k,\ a_{k+1}=-a_k+m_k\ \cdots\cdots\text{①}$$

$a_{k+1}=a_k$のときは，P_kにおける接線の傾きがm_kなので，$m_k=2a_k$となるが，このときも①は成立している。

(2) 数列$\{m_k\}$は公比rの等比数列なので，$m_k=m_1r^{k-1}$

①より，$a_{k+1}=-a_k+m_1r^{k-1}\ \cdots\cdots$②

(i) $r=-1$のとき　②より，$a_{k+1}=-a_k+m_1(-1)^{k-1}$

両辺を$(-1)^{k+1}$で割って，$\dfrac{a_{k+1}}{(-1)^{k+1}}=\dfrac{a_k}{(-1)^k}+m_1$

$$\frac{a_k}{(-1)^k}=\frac{a_1}{-1}+(k-1)m_1=-a_1+m_1(k-1)$$

よって，$a_k=(-a_1-m_1+m_1k)(-1)^k$

(ii) $r\neq-1$のとき　②を変形して，$a_{k+1}-\dfrac{m_1}{1+r}r^k=-\left(a_k-\dfrac{m_1}{1+r}r^{k-1}\right)$

$$a_k-\frac{m_1}{1+r}r^{k-1}=\left(a_1-\frac{m_1}{1+r}r^0\right)(-1)^{k-1}$$

よって，$a_k=\dfrac{m_1}{1+r}r^{k-1}+\left(a_1-\dfrac{m_1}{1+r}\right)(-1)^{k-1}\ \cdots\cdots$③

(3) $r\neq-1$より，③において$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$とすると，$a_k=\dfrac{m_1}{1+r}r^{k-1}\ \cdots\cdots$④

このとき，$\mathrm{P}_k(a_k,\ {a_k}^2)$を通り，傾き$m_k=m_1r^{k-1}$の直線$l_k$は，

$$y-{a_k}^2=m_1r^{k-1}(x-a_k),\ y=m_1r^{k-1}x-m_1r^{k-1}a_k+{a_k}^2$$

④を代入して，$y=m_1r^{k-1}x-{m_1}^2\dfrac{r^{2k-2}}{1+r}+{m_1}^2\dfrac{r^{2k-2}}{(1+r)^2}$

$$=m_1r^{k-1}x-{m_1}^2\frac{r^{2k-1}}{(1+r)^2}\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

⑤と$y=bx^2$を連立して，$bx^2-m_1r^{k-1}x+{m_1}^2\dfrac{r^{2k-1}}{(1+r)^2}=0$

$$D={m_1}^2r^{2k-2}-4b{m_1}^2\frac{r^{2k-1}}{(1+r)^2}={m_1}^2r^{2k-2}\left\{1-\frac{4br}{(1+r)^2}\right\}$$

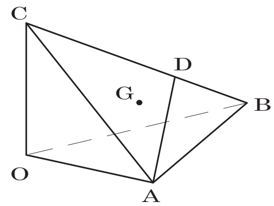
ここで，$m_1\neq0$，$r\neq0$から，$1-\dfrac{4br}{(1+r)^2}=0$，すなわち$b=\dfrac{(1+r)^2}{4r}$とすると，任意のkに対して$D=0$となり，直線l_kと$y=bx^2$のグラフは接する。

［解　説］

(2)の漸化式はパターンどおりに解いています。

© 電送数学舎 2003

4a　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件より，

$$|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b,\ |\vec{c}|=c,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

さて，$\angle\mathrm{OGA}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=0$

点 G は△ABC の重心なので，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ から，

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0,\ -2a^2+b^2+c^2=0\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，$\angle\mathrm{OGB}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})=0,\ a^2-2b^2+c^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\angle\mathrm{OGC}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})=0,\ a^2+b^2-2c^2=0\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$-3a^2+3b^2=0$ から $a=b$，$-a^2+c^2=0$ から $a=c$ となる。これは③を満たすので，求める条件は，$a=b=c$ である。

(2)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=t:1-t\ (t\neq 0)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{a}+t\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}=(1-t)\vec{a}+\frac{2t}{3}\vec{b}+\frac{t}{3}\vec{c}$$

また，$\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-(1-t)\vec{a}-\frac{2t}{3}\vec{b}-\frac{t}{3}\vec{c}$$

$$=-(1-t)\vec{a}+\left(1-\frac{2t}{3}\right)\vec{b}+\left(1-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(1-t)^2a^2+\left(1-\frac{2t}{3}\right)^2b^2+\left(1-\frac{t}{3}\right)^2c^2$$

$$=\frac{1}{9}(9a^2+4b^2+c^2)t^2-\frac{2}{3}(3a^2+2b^2+c^2)t+a^2+b^2+c^2$$

$$=\frac{1}{9}(9a^2+4b^2+c^2)\left\{t-\frac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2}\right\}^2+\frac{a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2}{9a^2+4b^2+c^2}$$

以上より，$t=\dfrac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2}$ のとき，OQ は最小値 $\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2}{9a^2+4b^2+c^2}}$ をとる。

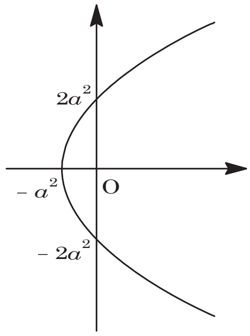
［解 説］

(2)の平方完成の計算は，過程は省きましたが，たいへんな量でした。ところで，(1)は何のための設問なのでしょうか。

© 電送数学舎 2003

4b

問題のページへ



(1)　$z=t+ai$ のとき，$z^2=t^2-a^2+2ati$

ここで，$z^2=x+yi$ とおくと，

$$x=t^2-a^2\cdots\cdots\cdots①,\quad y=2at\cdots\cdots\cdots②$$

②より $t=\dfrac{y}{2a}$，①に代入して $x=\dfrac{y^2}{4a^2}-a^2\cdots\cdots\cdots③$

よって，③の曲線を図示すると，右図のようになる。

(2)　点 ai を原点のまわりに θ だけ回転すると，

$$ai(\cos\theta+i\sin\theta)=a(-\sin\theta+i\cos\theta)$$

以下，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として設定した xy 平面上で考える。

直線 m は，点 $(-a\sin\theta,\ a\cos\theta)$ を通り，法線ベクトルが $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ であるので，

$$-\sin\theta\cdot(x+a\sin\theta)+\cos\theta\cdot(y-a\cos\theta)=0$$

$$-x\sin\theta+y\cos\theta-a=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$-\left(\dfrac{y^2}{4a^2}-a^2\right)\sin\theta+y\cos\theta-a=0$

$$\frac{\sin\theta}{4a^2}y^2-y\cos\theta+a-a^2\sin\theta=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

(i)　$\sin\theta=0$ のとき　$\cos\theta\neq0$ より，⑤は $-y\cos\theta+a=0$

$y=\dfrac{a}{\cos\theta}$ から，③④の共有点は 1 個である。

(ii)　$\sin\theta\neq0$ のとき　⑤の判別式を D とすると，

$$D=\cos^2\theta-4\cdot\frac{\sin\theta}{4a^2}(a-a^2\sin\theta)=1-\frac{1}{a}\sin\theta$$

よって，$0<a<1$ から，$D>0$ $(\sin\theta<a)$ のとき③④の共有点は 2 個，$D=0$ $(\sin\theta=a)$ のとき共有点は 1 個，$D<0$ $(\sin\theta>a)$ のとき共有点は 0 個である。

(i)(ii)より，③④の共有点の個数は，$-1\leqq\sin\theta<0$，$0<\sin\theta<a$ のとき 2 個，$\sin\theta=0$，a のとき 1 個，$a<\sin\theta\leqq1$ のとき 0 個である。

[解 説]

本来は複素数平面の問題ですが，(2)では上のように xy 平面を設定して記述した方がすっきりします。

© 電送数学舎 2003