1

解答解説のページへ

xy 平面上で，$x = r(t)\cos t$，$y = r(t)\sin t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。

(1)　$r(t) = e^{-t}$ のとき, x の最小値と y の最大値を求め, C の概形を図示せよ。

(2)　一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し,

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3)　(1)で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，$V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt$ と表せることを示せ。

2

解答解説のページへ

座標平面上で，不等式

$$2|x-4|+|y-5|\leqq 3,\ \ 2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$$

が表す領域を，それぞれ $A,\ B$ とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。p，n を自然数とし，領域 $D_n=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x,\ x^p\leqq y\leqq n\}$ を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1)　グラフ $y=x^p\ \left(0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}}\right)$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2)　不等式 $M_n<S_n<M_n+n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{4a}}$

解答解説のページへ

空間内に四面体 OABC があり$\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA はすべて90°であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA, $\angle$OGB, $\angle$OGC がすべて90°であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を$1:2$に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{\textbf{4b}}$ 解答解説のページへ

$0<a<1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z=t+ai$ (t は実数全体を動く)が表す直線を l とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が l 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 l を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と(1)で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

$\boxed{5a}$ 解答解説のページへ

座標平面上に点 $P(a,\ b)$ があり，P は $|a| \leqq \frac{1}{2}$，$|b| \leqq \frac{1}{2}$ の範囲を動く。また，点 $Q(x,\ y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている。ただし，

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$$

である。

(1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする。$P \neq O$ のとき，$\dfrac{RQ}{OP}$ の最大値を求め，その最大値を与える点 P の全体を図示せよ。

(2) OQ の最小値と，その最小値を与える点 P の座標を求めよ。

$\boxed{5\mathrm{b}}$ 解答解説のページへ

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q, R とし，接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1)　$m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2)　G を数式で表せ。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

1

問題のページへ

(1)　$x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ より，

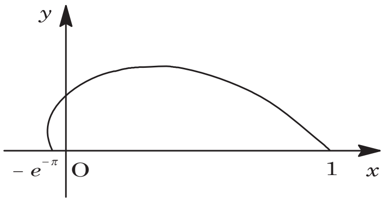
$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}(\sin t+\cos t)=-\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}(\sin t-\cos t)=-\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$		$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$-e^{-\pi}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	0

$t=\frac{1}{4}\pi$ のとき$\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\ \frac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}}\right)$，

$t=\frac{3}{4}\pi$ のとき$\left(-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\ \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}\right)$となるので，$x$ の最小値は$-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$ $\left(t=\frac{3}{4}\pi\right)$，$y$ の最大値は$\frac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$ $\left(t=\frac{1}{4}\pi\right)$である。



(2)　$I=\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt$

$$=\left[\frac{1}{3}\{r(t)\}^3\sin^2 t\cos t\right]_0^{\pi}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\{2\sin t(1-\sin^2 t)-\sin^3 t\}dt=\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\left(\sin^3 t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt$$

(3)　x の最小値を x_0 とおくと，(2)より，

$$V=\int_{x_0}^{1}\pi y^2dx-\int_{x_0}^{-e^{-\pi}}\pi y^2dx=\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0}y^2\frac{dx}{dt}dt-\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}y^2\frac{dx}{dt}dt$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}y^2\frac{dx}{dt}dt=-\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2\sin^2 t\{r'(t)\cos t-r(t)\sin t\}dt$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt+\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\sin^3 t\,dt$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\left(\sin^3 t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt+\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\sin^3 t\,dt$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\sin t\,dt=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}e^{-3t}\sin t\,dt$$

［解　説］

パラメータ曲線を題材とした微積分の基本的な問題です。(3)の計算も，(2)を利用すれば繁雑ではありません。

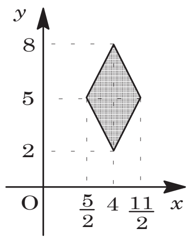
2

問題のページへ

(1) 不等式 $2|x|+|y|\leqq 3$ ……①の表す領域は，4 点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，$(0,\ 3)$，$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，$(0,\ -3)$ を結んでできるひし形の内部または辺上である。

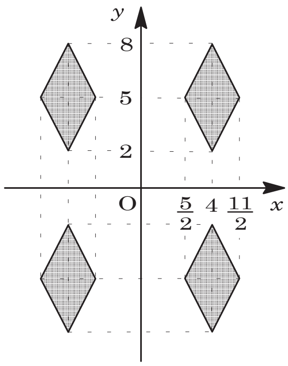
これより，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$ ……②の表す領域は，①の領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものである。

これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(2) 不等式 $2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$ ……③の表す領域は，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のときは②と一致し，$x<0$，$y\geqq 0$ のときは②を y 軸対称したもの，$x<0$，$y<0$ のときは②を原点対称したもの，$x\geqq 0$，$y<0$ のときは②を x 軸対称したものである。

これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(3) $\log_x|y|$ が有理数，すなわち $\log_x|y|=\frac{q}{p}$ となる条件は，$x^{\frac{q}{p}}=|y|$，$x^q=|y|^p$ となる整数 p, q が存在することである。

さて，$x>0$，$y>0$ では，領域内の格子点は，$x=3$ のとき，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$ であるが，いずれも $3^q=y^p$ は成立しない。

$x=4$ のとき，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(4,\ 7)$，$(4,\ 8)$ であるが，$4^q=y^p$ が成立するのは $(4,\ 2)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 8)$ の場合である。

また，$x=5$ のとき，$(5,\ 4)$，$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$ であるが，$5^q=y^p$ が成立するのは $(5,\ 5)$ の場合だけである。

よって，$y<0$ のときも考え合わせると，求める点は，$(4,\ \pm 2)$，$(4,\ \pm 4)$，$(4,\ \pm 8)$，$(5,\ \pm 5)$ となる。

［解 説］

いきなり不等式③の領域を図示するのは難しいので，(1)が誘導となっています。なお，不等式①の領域については，場合分けなどのプロセスを省き，結果だけを述べています。

3

問題のページへ

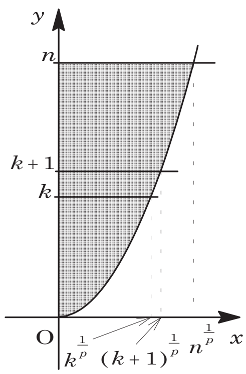
(1)　まず，二項定理より，$0 \leqq k \leqq n-1$, p を自然数として，

$$(k^{\frac{1}{p}}+1)^p \geqq k+1,\ k^{\frac{1}{p}}+1 \geqq (k+1)^{\frac{1}{p}}$$

$$(k+1)^{\frac{1}{p}} - k^{\frac{1}{p}} \leqq 1$$

なお，等号は $p=1$ または $k=0$ のときに成立する。

これより，$k \leqq y \leqq k+1$ において，$y=x^p$ のグラフと交わる単位正方形は，ただ 1 つとなる。したがって，$0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}}$ すなわち $0 \leqq y \leqq n$ のとき，$y=x^p$ と交わる単位正方形の個数は n である。



(2)　$k \leqq y \leqq k+1$ において，$y=x^p$ のグラフと y 軸にはさまれた部分の面積を $S_{n,k}$，この部分にあり，$y=x^p$ と交わらない単位正方形の個数を $M_{n,k}$ とすると，

$$1\times M_{n,k} < S_{n,k} < 1\times(M_{n,k}+1),\ \sum_{k=0}^{n-1} M_{n,k} < \sum_{k=0}^{n-1} S_{n,k} < \sum_{k=0}^{n-1}(M_{n,k}+1)$$

条件より，$\sum_{k=0}^{n-1} S_{n,k} = S_n$，$\sum_{k=0}^{n-1} M_{n,k} = M_n$ なので，$M_n < S_n < M_n + n$ である。

また，$S_n = n^{\frac{1}{p}}\cdot n - \int_0^{n^{\frac{1}{p}}} x^p dx = n^{\frac{1}{p}+1} - \frac{1}{p+1}\Big[x^{p+1}\Big]_0^{n^{\frac{1}{p}}} = n^{\frac{1}{p}+1} - \frac{1}{p+1}n^{\frac{1}{p}+1}$

$$= \left(1-\frac{1}{p+1}\right)n^{\frac{p+1}{p}} = \frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}$$

(3)　$y=k$ 上の格子点の個数は $M_{n,k}+1$，$y=n$ 上の格子点の個数は $[n^{\frac{1}{p}}]+1$ より，

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1}(M_{n,k}+1) + [n^{\frac{1}{p}}]+1 = M_n + n + [n^{\frac{1}{p}}]+1$$

(2)より，$S_n - n < M_n < S_n$ なので，$S_n + [n^{\frac{1}{p}}]+1 < L_n < S_n + [n^{\frac{1}{p}}]+n+1$

さらに，$n^{\frac{1}{p}}-1 < [n^{\frac{1}{p}}] \leqq n^{\frac{1}{p}}$ より，$S_n + n^{\frac{1}{p}} < L_n < S_n + n^{\frac{1}{p}} + n + 1$

$$\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} < L_n < \frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} + n + 1$$

$$\frac{p}{p+1} + n^{-1} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n < \frac{p}{p+1} + n^{-1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

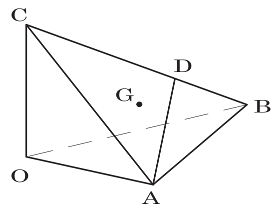
よって，$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}$ である。

［解 説］

S_n，M_n，L_n の 3 者がうまく連関するように誘導がつけられています。

4a

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件より，

$$|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b,\ |\vec{c}|=c,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

さて，$\angle\mathrm{OGA}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=0$

点 G は△ABC の重心なので，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ から，

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0,\ -2a^2+b^2+c^2=0\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，$\angle\mathrm{OGB}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})=0,\ a^2-2b^2+c^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\angle\mathrm{OGC}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})=0,\ a^2+b^2-2c^2=0\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$-3a^2+3b^2=0$ から $a=b$，$-a^2+c^2=0$ から $a=c$ となる。これは③を満たすので，求める条件は，$a=b=c$ である。

(2)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=t:1-t\ (t\neq 0)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{a}+t\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}=(1-t)\vec{a}+\frac{2t}{3}\vec{b}+\frac{t}{3}\vec{c}$$

また，$\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-(1-t)\vec{a}-\frac{2t}{3}\vec{b}-\frac{t}{3}\vec{c}$$

$$=-(1-t)\vec{a}+\left(1-\frac{2t}{3}\right)\vec{b}+\left(1-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(1-t)^2a^2+\left(1-\frac{2t}{3}\right)^2b^2+\left(1-\frac{t}{3}\right)^2c^2$$

$$=\frac{1}{9}(9a^2+4b^2+c^2)t^2-\frac{2}{3}(3a^2+2b^2+c^2)t+a^2+b^2+c^2$$

$$=\frac{1}{9}(9a^2+4b^2+c^2)\left\{t-\frac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2}\right\}^2+\frac{a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2}{9a^2+4b^2+c^2}$$

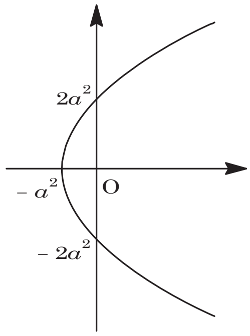
以上より，$t=\dfrac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2}$ のとき，OQ は最小値 $\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2}{9a^2+4b^2+c^2}}$ をとる。

［解 説］

(2)の平方完成の計算は，過程は省きましたが，たいへんな量でした。ところで，(1)は何のための設問なのでしょうか。

$\boxed{4\mathrm{b}}$

問題のページへ



(1)　$z = t + ai$ のとき，$z^2 = t^2 - a^2 + 2ati$

ここで，$z^2 = x + yi$ とおくと，

$$x = t^2 - a^2 \cdots\cdots\cdots①,\quad y = 2at \cdots\cdots\cdots②$$

②より $t = \dfrac{y}{2a}$，①に代入して $x = \dfrac{y^2}{4a^2} - a^2 \cdots\cdots\cdots③$

よって，③の曲線を図示すると，右図のようになる。

(2)　点 ai を原点のまわりに θ だけ回転すると，

$$ai(\cos\theta + i\sin\theta) = a(-\sin\theta + i\cos\theta)$$

以下，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として設定した xy 平面上で考える。

直線 m は，点 $(-a\sin\theta,\ a\cos\theta)$ を通り，法線ベクトルが $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ であるので，

$$-\sin\theta\cdot(x + a\sin\theta) + \cos\theta\cdot(y - a\cos\theta) = 0$$

$$-x\sin\theta + y\cos\theta - a = 0 \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$-\left(\dfrac{y^2}{4a^2} - a^2\right)\sin\theta + y\cos\theta - a = 0$

$$\frac{\sin\theta}{4a^2}y^2 - y\cos\theta + a - a^2\sin\theta = 0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

(i)　$\sin\theta = 0$ のとき　$\cos\theta \neq 0$ より，⑤は $-y\cos\theta + a = 0$

$y = \dfrac{a}{\cos\theta}$ から，③④の共有点は 1 個である。

(ii)　$\sin\theta \neq 0$ のとき　⑤の判別式を D とすると，

$$D = \cos^2\theta - 4\cdot\frac{\sin\theta}{4a^2}(a - a^2\sin\theta) = 1 - \frac{1}{a}\sin\theta$$

よって，$0 < a < 1$ から，$D > 0$ $(\sin\theta < a)$ のとき③④の共有点は 2 個，$D = 0$ $(\sin\theta = a)$ のとき共有点は 1 個，$D < 0$ $(\sin\theta > a)$ のとき共有点は 0 個である。

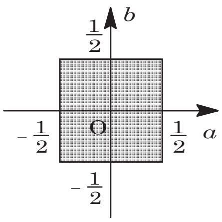
(i)(ii)より，③④の共有点の個数は，$-1 \leqq \sin\theta < 0$，$0 < \sin\theta < a$ のとき 2 個，$\sin\theta = 0,\ a$ のとき 1 個，$a < \sin\theta \leqq 1$ のとき 0 個である。

［解 説］

本来は複素数平面の問題ですが，(2)では上のように xy 平面を設定して記述した方がすっきりします。

$\boxed{5a}$ 問題のページへ

(1)　$|a| \leqq \dfrac{1}{2}$，$|b| \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$(a,\ b)$ の存在範囲を図示すると，右図のようになる。



さて，$A^{-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = 3\cdot\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

なので，$AX = B$ より，

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+1 \\ a+2b-1 \end{pmatrix}$$

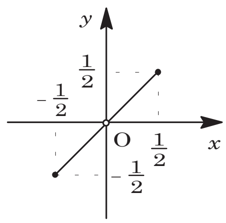
これより，$\mathrm{Q}(2a+b+1,\ a+2b-1)$ となり，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が原点 O にあるときの点 Q の位置 R は，$\mathrm{R}(1,\ -1)$ であるので，

$$\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}} = \frac{\sqrt{(2a+b)^2+(a+2b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{5a^2+5b^2+8ab}{a^2+b^2}} = \sqrt{5+\frac{8ab}{a^2+b^2}}$$

$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ が最大値をとるのは，$ab>0$ のときであり，相加・相乗平均の関係より，

$$a^2+b^2 \geqq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab,\quad \frac{ab}{a^2+b^2} \leqq \frac{1}{2}$$

等号は $a^2 = b^2$ すなわち $a = b$ のとき成立し，$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ は最大値 $\sqrt{5+8\cdot\dfrac{1}{2}} = 3$ をとる。このとき，$\mathrm{P}(a,\ b)$ は，$b = a$，$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$，$a \neq 0$ を満たし，その存在する位置を図示すると右図のようになる。



(2)　$\mathrm{OQ}^2 = (2a+b+1)^2+(a+2b-1)^2 = 5a^2+5b^2+8ab+2a-2b+2$

$$= 5a^2+(8b+2)a+5b^2-2b+2 = 5\left(a+\frac{4b+1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}b^2-\frac{18}{5}b+\frac{9}{5}$$

$$= 5\left(a+\frac{4b+1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}(b-1)^2$$

さて，$-\dfrac{1}{2} \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}$ より $-\dfrac{3}{5} \leqq -\dfrac{4b+1}{5} \leqq \dfrac{1}{5}$ となり，$a = -\dfrac{4b+1}{5}$ が $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲にあるかどうかで場合分けをする。

(i)　$-\dfrac{3}{5} \leqq -\dfrac{4b+1}{5} \leqq -\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{3}{8} \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ より，b の値を固定すると，$a = -\dfrac{1}{2}$ で OQ^2 は最小となり，

$$\mathrm{OQ}^2 = \frac{5}{4}+5b^2-4b-1-2b+2 = 5b^2-6b+\frac{9}{4} = 5\left(b-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}$$

ここで，b を $\dfrac{3}{8} \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}$ で変化させると，$b = \dfrac{1}{2}$ で最小値をとる。

このとき，$\mathrm{OQ}^2 = \dfrac{5}{4}-3+\dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{2}$ となる。

(ii)　$-\frac{1}{2} \leqq -\frac{4b+1}{5} \leqq \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2} \leqq b \leqq \frac{3}{8}\right)$のとき

$-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ より, b の値を固定すると，$a = -\frac{4b+1}{5}$ で OQ^2 は最小となり,

$$\mathrm{OQ}^2 = \frac{9}{5}(b-1)^2$$

ここで, b を $-\frac{1}{2} \leqq b \leqq \frac{3}{8}$ で変化させると，$b = \frac{3}{8}$ で最小値をとる。

このとき，$\mathrm{OQ}^2 = \frac{9}{5}\left(\frac{3}{8}-1\right)^2 = \frac{45}{64}$ となる。

(i)(ii)より，OQ^2 の最小値は $\frac{1}{2}$ となり, OQ の最小値は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

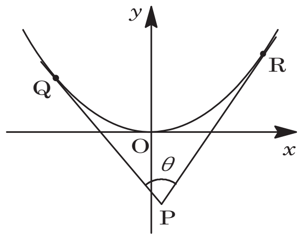
このとき，$a = -\frac{1}{2}$，$b = \frac{1}{2}$ より，$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$である。

［解 説］

a と b は独立に値を変化させることができるので，(2)では 1 文字固定の考え方を用いて, OQ の最小値を求めました。

$\boxed{5b}$

問題のページへ



(1)　x 軸の正の方向から PQ, PR を測った角をそれぞれ α, β とおくと, $m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\beta$ となる。

$m_1 < 0 < m_2$ より, $\beta < \alpha$ となり,

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通り, 傾き m の直線は,

$$y - b = m(x - a),\ \ y = mx - ma + b$$

放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と接することより, $\frac{1}{4}x^2 - mx + ma - b = 0$

$$D = m^2 - 4\cdot\frac{1}{4}(ma - b) = 0,\ \ m^2 - am + b = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

$a^2 > 4b$ より, ②は 2 つの実数解をもち, これを m_1, m_2 ($m_1 < m_2$) とすると,

$$m_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},\ \ m_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $m_1 < 0 < m_2$ となるので, ①より, $\tan\theta = \frac{-\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + b}$

$$(1 + b)\tan\theta = -\sqrt{a^2 - 4b}$$

$\tan\theta > 0$ から, $1 + b < 0$ すなわち $b < -1$ のもとで,

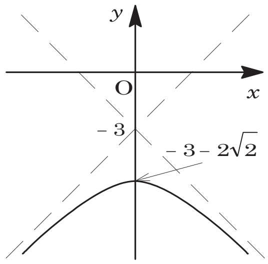
$$(1 + b)^2\tan^2\theta = a^2 - 4b,\ \ a^2 = (1 + b)^2\tan^2\theta + 4b$$

よって, $\mathrm{P}(a,\ b)$ の作る図形の方程式は, $x^2 = (1 + y)^2\tan^2\theta + 4y$ ($y < -1$)

(3)　$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\tan\theta = 1$ より, $x^2 = (1 + y)^2 + 4y$

$$x^2 - y^2 - 6y = 1,\ \ x^2 - (y + 3)^2 = -8$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{(y + 3)^2}{8} = -1$$



よって, 図形 G は双曲線であり, その 2 本の漸近線は, $x \pm (y + 3) = 0$ から $y = \pm x - 3$ となる。さらに, $y < -1$ より双曲線の下側の枝となり, 図示すると, 右図のようになる。

[解　説]

放物線に引いた 2 本の接線の交点が描く軌跡を求める問題です。2 本の接線の位置関係について, チェックが必要です。