1　解答解説のページへ

2 つの関数 $f(x)=-px^2+2\ (p>0)$，$g(x)=|x|-2$ が与えられていて，放物線 $y=f(x)$ が 2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るとする。

(1) p の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点をすべて求めよ。

(3) (2)で求めた交点のうち，x 座標が最小になる点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。このとき，点 A における $y=f(x)$ の接線 $y=h(x)$ を求めよ。また，この接線 $y=h(x)$ と $y=g(x)$ の，点 A とは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g(b))$ を求めよ。

(4) 次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a\leqq x\leqq b,\ \ y\leqq h(x),\ \ y\geqq f(x),\ \ y\geqq g(x)$$

2

解答解説のページへ

複素数平面上に複素数$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$をとり，$\alpha=z+1$，$\beta=z-1$とおく。

(1)　$|\beta|=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$を示せ。

(2)　$\arg\beta=\dfrac{\theta}{2}+90^\circ$を示せ。ただし，$0^\circ\leqq\arg\beta<360^\circ$とする。

(3)　$\theta=60^\circ$とする。9 つの複素数$\alpha^m\beta^n$ $(m,\ n=1,\ 2,\ 3)$の虚部の最小値を求め，その最小値を与える$(m,\ n)$のすべてを決定せよ。

3

解答解説のページへ

$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$とする。平行四辺形 ABCD の辺 BC を$\alpha:1-\alpha$に内分する点を P とし，辺 CD を$1-\beta:\beta$に内分する点を Q とする。また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$として次の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(2) 長さの比$\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$および$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$を求めよ。

(3) $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=1$，$\angle\mathrm{DAB}=60^\circ$とするとき，$\triangle\mathrm{AQR}$の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に 6 個並んでいる。これらの 6 個の電球のスイッチを同時に入れた後，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青青青青青，赤赤青青青青，…… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

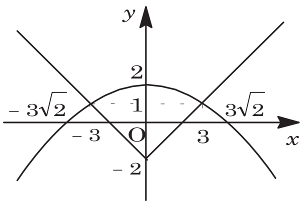
(3) 色の変化がちょうど n 回 $(0 \leqq n \leqq 5)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　放物線 $y=-px^2+2$ が 2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ と $(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るので,



$$0=-18p+2,\ \ p=\frac{1}{9}$$

(2)　$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$ より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフはともに y 軸対称である。

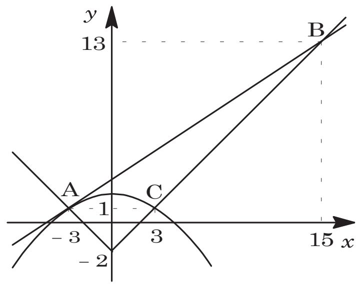
これより, $x\geqq 0$ において，$f(x)=g(x)$ とすると,

$$-\frac{1}{9}x^2+2=x-2,\ \ x^2+9x-36=0,\ \ (x+12)(x-3)=0$$

$x\geqq 0$ から，$x=3$，$y=3-2=1$ となる。

対称性を考えると，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の座標は，$(3,\ 1)$，$(-3,\ 1)$ である。

(3)　$f'(x)=-\dfrac{2}{9}x$ から，$f'(-3)=\dfrac{2}{3}$ となる。



これより，$\mathrm{A}(-3,\ 1)$ における接線の方程式は,

$$y-1=\frac{2}{3}(x+3),\ \ y=\frac{2}{3}x+3$$

$y=x-2$ との交点は，$\dfrac{2}{3}x+3=x-2$ から $x=15$

$$y=15-2=13$$

よって，$\mathrm{B}(15,\ 13)$ となる。

(4)　$\mathrm{C}(3,\ 1)$ として, 求める図形の面積を S とすると,

$$S=\triangle\mathrm{ABC}-2\int_0^3\left(-\frac{x^2}{9}+2-1\right)dx=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12-2\int_0^3\left(-\frac{x^2}{9}+1\right)dx$$

$$=36-2\left[-\frac{1}{27}x^3+x\right]_0^3=32$$

［解 説］

第 1 問は, 計算ミスが致命傷になる超基本題です。

2

問題のページへ

(1)　$\beta = z - 1 = \cos\theta - 1 + i\sin\theta\ (0° < \theta < 180°)$ より，

$$|\beta| = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2 - 2\cos\theta} = \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

(2)　$\beta = -2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$ となる。

ここで，$\cos\left(\frac{\theta}{2} + 90°\right) = -\sin\frac{\theta}{2}$，$\sin\left(\frac{\theta}{2} + 90°\right) = \cos\frac{\theta}{2}$ より，

$$\beta = 2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2} + 90°\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + 90°\right)\right\}$$

よって，$\arg\beta = \frac{\theta}{2} + 90°$

(3)　$\theta = 60°$ のとき, (1)(2)より，$\beta = \cos 120° + i\sin 120°$

$$\alpha = z + 1 = \cos 60° + 1 + i\sin 60° = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}(\cos 30° + i\sin 30°)$$

これより，$|\alpha^m\beta^n| = (\sqrt{3})^m \cdot 1^n = (\sqrt{3})^m$

$$\arg(\alpha^m\beta^n) = m\arg\alpha + n\arg\beta = 30° \times m + 120° \times n$$

$0° \leqq \arg(\alpha^m\beta^n) < 360°$ として，$\alpha^m\beta^n$ の絶対値と偏角についてまとめると，

m	1	1	1	2	2	2	3	3	3
n	1	2	3	1	2	3	1	2	3
絶対値	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3	3	3	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
偏角	150°	270°	30°	180°	300°	60°	210°	330°	90°

まず，虚部が負となるのは，偏角が180°より大きいときである。上の表から調べると，$(m,\ n) = (1,\ 2)$ のとき虚部が $-\sqrt{3}$，$(m,\ n) = (2,\ 2)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$ のとき虚部が $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。

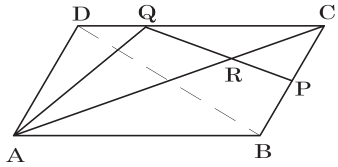
よって，虚部の最小値は $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ であり，最小値を与える $(m,\ n)$ は，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$ となる。

［解 説］

複素数の極形式に関する基本題です。なお，(3)は，$\theta = 60°$ を z に代入した後，α，β を極形式に直した方が容易です。

3

問題のページへ



(1) $\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\alpha:1-\alpha$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$

$\mathrm{CQ}:\mathrm{QD}=1-\beta:\beta$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\beta\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}=\dfrac{t}{1-t}$，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}=s$ とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=t(\vec{a}+\alpha\vec{b})+(1-t)(\beta\vec{a}+\vec{b})\\&=(t+\beta-\beta t)\vec{a}+(\alpha t+1-t)\vec{b}\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\vec{a}+s\vec{b}\cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$t+\beta-\beta t=s\cdots\cdots\cdots③,\quad \alpha t+1-t=s\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$t+\beta-\beta t=\alpha t+1-t$，$t=\dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$

すると，$1-t=\dfrac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}$ より，$\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}=\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}$

また，④より，$s=(\alpha-1)\cdot\dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}+1=\dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}$ から，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}$

(3) $\triangle\mathrm{AQR}=s\triangle\mathrm{AQC}=s(1-\beta)\triangle\mathrm{ADC}=s(1-\beta)\triangle\mathrm{ABD}$

$$=\frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}(1-\beta)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{2-\alpha-\beta}$$

［解 説］

平行四辺形を題材にした平面ベクトルの基本題です。

4

問題のページへ

(1)　右図のように，6 個の電球を左から①～⑥とすると，色のパターンは2^6通りできる。

①→②→③→④→⑤→⑥

①が赤のとき，色の変化が 1 回だけなのは，赤→青の変化が起こった後は色の変化がない場合である。すると，初めて青になる電球は②～⑥のいずれかなので，この場合は${}_5\mathrm{C}_1$通りある。

よって，左端が赤色で色の変化が 1 回だけ起きる確率は，$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1}{2^6}=\dfrac{5}{64}$である。

(2)　(1)と同様に，①が青のとき色の変化が 1 回だけの確率は$\dfrac{5}{64}$であり，合わせて$\dfrac{5}{64}\times 2=\dfrac{5}{32}$となる。

また，色の変化のない確率は，明らかに$\dfrac{1}{64}\times 2=\dfrac{1}{32}$である。

よって，色の変化が少なくとも 2 回起きる確率は，

$$1-\left(\frac{5}{32}+\frac{1}{32}\right)=\frac{13}{16}$$

(3)　色の変化がちょうどn回起きる確率を$P(n)$とすると, (2)より,

$$P(0)=\frac{1}{32},\ P(1)=\frac{5}{32}$$

同様に考えて，$P(2)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^6}\times 2=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{16}$，$P(3)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{2^6}\times 2=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{16}$

$$P(4)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{2^6}\times 2=\frac{5}{32},\ P(5)=\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{2^6}\times 2=\frac{1}{32}$$

(4)　色の変化の回数の期待値をEとすると,

$$E=0\times\frac{1}{32}+1\times\frac{5}{32}+2\times\frac{10}{32}+3\times\frac{10}{32}+4\times\frac{5}{32}+5\times\frac{1}{32}=\frac{5}{2}$$

［解 説］

この問題は，最初，題意がつかめず，かなりの時間を費やしてしまいました。というのも，年末に街にあふれるイルミネーションのイメージが先行して，赤と青が交互に点滅すると思い込んだためです。いったん，そのような状況になってしまうと，なかなか抜け出せないものです。