1

解答解説のページへ

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx$ とおく。ただし，$0!=1$ とする。

(1)　I_0 の値を求め，$n=1,\ 2,\ \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx \leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。ただし，a, b は定数とする。

(1)　$(a+b)^4$，$(a-b)^4$ を展開せよ。

(2)　A^4 を $(a+b)^4$，$(a-b)^4$ を用いて表せ。

(3)　自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4)　$0<a<1$ とし $b=1-a$ としたときの A^n の $(1,\ 1)$ 成分を x_n とする。極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$x(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ y(t)=\cos(2t)\quad(0\leqq t<2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする。

(1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。

(2) C が x 軸, y 軸に関して対称であることを示せ。

(3) C の概形を描け。

(4) C が囲む図形の面積を求めよ。

4　　解答解説のページへ

座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O，A，B，C は同一平面上にないとする。

(3)　点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れた後，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青…青，赤赤青…青，…… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど m 回$(0 \leqq m \leqq n-1)$起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0e^x dx=\int_0^2 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^2=e^2-1$

また，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx=\dfrac{(-1)^n}{n!}\left\{\Big[x^ne^x\Big]_0^2-\int_0^2 nx^{n-1}e^x dx\right\}$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}2^ne^2-\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1}e^x dx=\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}+I_{n-1}$$

すると，$I_1=\dfrac{-2e^2}{1!}+(e^2-1)=-e^2-1$，$I_2=\dfrac{4e^2}{2!}+(-e^2-1)=e^2-1$ より，

$$I_3=\frac{-8e^2}{3!}+(e^2-1)=-\frac{1}{3}e^2-1$$

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ より，

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^x dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^2 dx=\frac{e^2}{n!}\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^2=\frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!}$$

ここで, $n\geqq 2$ のとき,

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{2^{n-1}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+1)}\leqq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$n=1$ のときも $\dfrac{2^2}{2!}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ となり, $(*)$は成立している。

よって，$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3) (1)から，$I_n-I_{n-1}=\dfrac{(-1)^n2^ne^2}{n!}$ より，$\dfrac{(-1)^n2^n}{n!}=\dfrac{1}{e^2}(I_n-I_{n-1})$　$(n\geqq 1)$

$$\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}\sum_{k=1}^n(I_k-I_{k-1})=\frac{1}{e^2}(I_n-I_0)=\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k2^k}{k!}=1+\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)=\frac{1}{e^2}(I_n+1)$

さて, (2)より，$|I_n|=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$n\to\infty$のとき，$|I_n|\to 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となり,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}$$

［解 説］

(3)が本題ですが, それを解くのに無理が生じないように, (1)と(2)が設けられています。配慮の深い問題です。

2

問題のページへ

(1)　二項定理より，$(a+b)^4 = {}_4\mathrm{C}_0a^4 + {}_4\mathrm{C}_1a^3b + {}_4\mathrm{C}_2a^2b^2 + {}_4\mathrm{C}_3ab^3 + {}_4\mathrm{C}_4b^4$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = \{a+(-b)\}^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

(2)　まず，$a+b=s$，$a-b=t$ とおくと，$a=\frac{1}{2}(s+t)$，$b=\frac{1}{2}(s-t)$ より，

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s+t & s-t \\ s-t & s+t \end{pmatrix}$$

これより，$A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} s+t & s-t \\ s-t & s+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+t & s-t \\ s-t & s+t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^2+t^2 & s^2-t^2 \\ s^2-t^2 & s^2+t^2 \end{pmatrix}$

$$A^4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} s^2+t^2 & s^2-t^2 \\ s^2-t^2 & s^2+t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^2+t^2 & s^2-t^2 \\ s^2-t^2 & s^2+t^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^4+t^4 & s^4-t^4 \\ s^4-t^4 & s^4+t^4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)^4+(a-b)^4 & (a+b)^4-(a-b)^4 \\ (a+b)^4-(a-b)^4 & (a+b)^4+(a-b)^4 \end{pmatrix}$$

(3)　(2)から，$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^n+t^n & s^n-t^n \\ s^n-t^n & s^n+t^n \end{pmatrix}$ と予測できるので，これを数学的帰納法によって証明する。

(i)　$n=1$ のとき　明らかに成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^k+t^k & s^k-t^k \\ s^k-t^k & s^k+t^k \end{pmatrix}$ と仮定する。

$$A^{k+1} = A^kA = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} s^k+t^k & s^k-t^k \\ s^k-t^k & s^k+t^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+t & s-t \\ s-t & s+t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(s^{k+1}+t^{k+1}) & 2(s^{k+1}-t^{k+1}) \\ 2(s^{k+1}-t^{k+1}) & 2(s^{k+1}+t^{k+1}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^{k+1}+t^{k+1} & s^{k+1}-t^{k+1} \\ s^{k+1}-t^{k+1} & s^{k+1}+t^{k+1} \end{pmatrix}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)^n+(a-b)^n & (a+b)^n-(a-b)^n \\ (a+b)^n-(a-b)^n & (a+b)^n+(a-b)^n \end{pmatrix}$

(4)　$b=1-a$ なので, (3)より，$x_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^n+(a-b)^n\} = \frac{1}{2}\{1+(2a-1)^n\}$

$0<a<1$ から，$-1<2a-1<1$ となり, $n\to\infty$ のとき $(2a-1)^n \to 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$

［解 説］

(1)を(2)の誘導とすれば, (2)において置き換え s, t は不要でした。後から気付きました。

3

問題のページへ

(1)　$x(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$y(t)=\cos 2t$ に対して $(x(t),\ y(t))=(0,\ 0)$ とすると，

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=0\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \cos 2t=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$0\leqq t<2\pi$ なので，①より $t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$ となり，$t=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$

②より $2t=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{5}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$ となり，$t=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

①②をともに満たすのは，$t=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$ のときである。

さて，速度ベクトル $\vec{v}$ は，$\vec{v}=(x'(t),\ y'(t))=\left(-\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right),\ -2\sin 2t\right)$ より，$t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $\vec{v}=(-1,\ -2)$，$t=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき $\vec{v}=(1,\ -2)$ となる。

(2)　$0\leqq t<2\pi$ に対して，$x(\pi+t)=\cos\left(\pi+t+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=-x(t)$

$$y(\pi+t)=\cos 2(\pi+t)=\cos 2t=y(t)$$

よって，曲線 C の $0\leqq t\leqq\pi$ の部分と，$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分とは y 軸対称である。

さて，$x(2\pi+t)=x(t)$，$y(2\pi+t)=y(t)$ なので，$0\leqq t\leqq 2\pi$ における曲線 C と $-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ における曲線 C とは一致する。

そこで，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ に対して，$x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\sin t)$ と変形すると，

$$x\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t+\cos t)=x(t)$$

$$y\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\cos 2\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\cos(3\pi-2t)=-\cos 2t=-y(t)$$

よって，曲線 C の $-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ の部分と，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ の部分とは x 軸対称である。

(3)　(1)より，

$$x'(t)=-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

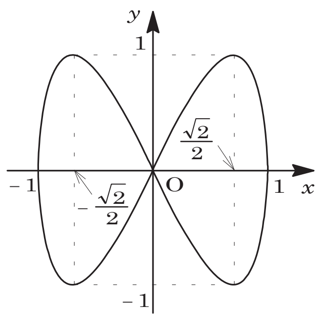
$$y'(t)=-2\sin 2t$$

曲線 C の $-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ に対する $(x(t),\ y(t))$ の増減は右表のようになる。

t	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$
$x'(t)$	0	$-$		$-$		$-$	
$x(t)$	1	↘	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

また(2)より，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ の部分は，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ の部分を x 軸対称すると得られるので，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ すなわち $0\leqq t<2\pi$ における C の概形は次の図のようになる。

(4)　曲線 C の $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の部分は，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に対応する。そこで，C が囲む図形の面積を S とすると，対称性から，



$$S = 4\int_0^1 y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} -\cos 2t \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dt$$

$$= 2\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{3}(-1-0)+2(1-0) = \frac{8}{3}$$

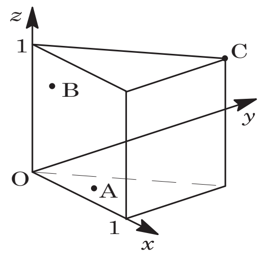
［解　説］

(2)の設問において，y 軸対称はすぐに示せますが，x 軸対称を示すのは一筋縄ではいきません。$x(t)$ を加法定理で展開し，しかも曲線をラフに描いて方針を決めました。

4

問題のページへ

(1)　求める単位ベクトルを$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$とおく。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=0$ より，$ax+by=0$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{e}=0$ より，$x+y+z=0$ ………②

①より，$(x,\ y)=k(b,\ -a)$（k は実数）

②から，$z=-x-y$ なので，

$$(x,\ y,\ z)=k(b,\ -a,\ a-b)$$

$|\vec{e}|=1$ より，$1=|k|\sqrt{b^2+(-a)^2+(a-b)^2}$ から，

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{b^2+(-a)^2+(a-b)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$$

よって，$\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}(b,\ -a,\ a-b)$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}=\pm\dfrac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|=\dfrac{|bc+ad-bd|}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$

ここで，$a\geqq b\geqq 0$, $c\geqq 0$, $d\geqq 0$ なので，$bc+ad-bd=bc+d(a-b)\geqq 0$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|=\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$$

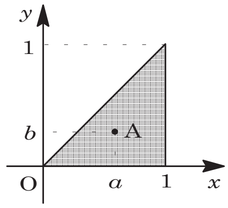
(2)　四面体 OABC において，△OAC を底面とすると，高さは$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|$となる。

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2)-(a+b)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}$$

四面体 OABC の体積を V とすると，(1)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}\cdot\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}=\frac{1}{6}(bc+ad-bd)$$

(3)　まず，点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ の位置を S 内でいったん固定した後，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内で動かし，V が最大になるときの点 B の位置を求める。次に，この状態を保ったまま，点 A を S 内で動かし，V の最大値を求める。



なお，$a=b=0$ のときは，点 A が原点 O と一致するので不適である。

(i)　点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a>b>0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}\{(a-b)d+bc\}$ となるので，V は d の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$，$0\leqq c\leqq 1$ より，$c=d=1$ のとき V は最大になる。

このとき，$V=\dfrac{1}{6}(a-b+b)=\dfrac{1}{6}a$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと，V は $a=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=c=d=1$，$0<b<1$ のとき，V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(ii) 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a>b=0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}ad$ となるので，V は d の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$ より，$d=1$ のとき V は最大になる。このとき $V=\dfrac{1}{6}a$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと，V は $a=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=d=1$，$b=0$，$0\leqq c\leqq 1$ のとき，V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(iii) 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a=b>0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}bc$ となるので，V は c の単調増加関数であり，$0\leqq c\leqq 1$ より，$c=1$ のとき V は最大になる。このとき $V=\dfrac{1}{6}b$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと，V は $b=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=b=c=1$，$0\leqq d\leqq 1$ のとき，V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(i)(ii)(iii)より，V の最大値は $\dfrac{1}{6}$，このときの点 A, B の位置は次の 3 種類である。

$\mathrm{A}(1,\ b,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$　$(0<b<1)$

$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(c,\ 0,\ 1)$　$(0\leqq c\leqq 1)$

$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ d)$　$(0\leqq d\leqq 1)$

［解 説］

(2)までは 1999 年に類題が出ています。ただ，(3)の最大値を求めるときに，いわゆる「予選→決勝戦」という 1 文字固定の解法を用いる必要があります。上の解では条件のきつい点 A をとりあえず固定し，点 B を動かすという方法で解きました。

5

問題のページへ

(1) n個の電球を左から$L_1 \sim L_n$とすると，色のパターンは2^n通りできる。

L_1が赤のとき，色の変化が1回だけなのは，赤→青の変化が起こった後は色の変化がない場合である。すると，初めて青になる電球は$L_2 \sim L_n$のいずれかなので，この場合は${}_{n-1}C_1$通りある。

よって，左端が赤色で色の変化が1回だけ起きる確率は，$\dfrac{{}_{n-1}C_1}{2^n} = \dfrac{n-1}{2^n}$である。

(2) (1)と同様に，L_1が青のとき色の変化が1回だけの確率は$\dfrac{n-1}{2^n}$であり，合わせて

$\dfrac{n-1}{2^n} \times 2 = \dfrac{n-1}{2^{n-1}}$となる。

また，色の変化のない確率は，明らかに$\dfrac{1}{2^n} \times 2 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$である。

よって，色の変化が少なくとも2回起きる確率は，

$$1 - \left(\frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

(3) (1)と同様に，L_1が赤のとき，色の変化がm回起きる確率は$\dfrac{{}_{n-1}C_m}{2^n}$である。

L_1が青の場合も同じ確率なので，色の変化がちょうどm回起きる確率を$P(m)$とすると，

$$P(m) = \frac{{}_{n-1}C_m}{2^n} \times 2 = \frac{{}_{n-1}C_m}{2^{n-1}}$$

(4) 色の変化の回数の期待値をEとすると，

$$E = \sum_{m=0}^{n-1} mP(m) = \sum_{m=0}^{n-1} m \cdot \frac{{}_{n-1}C_m}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m(n-1)!}{m!(n-1-m)!}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m(n-1)!}{m!(n-1-m)!} = \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(m-1)!(n-1-m)!}$$

$$= \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{m-1} = \frac{n-1}{2^{n-1}} \cdot (1+1)^{n-2} = \frac{n-1}{2}$$

［解 説］

$n=6$の場合が，文系で出題されています。なお，(4)は実質的に，組合せの公式$k\,{}_nC_k = n\,{}_{n-1}C_{k-1}$を用いています。