1

解答解説のページへ

a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 C : $y=ax^2$ $(x \geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，$w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。

3

解答解説のページへ

実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0°<\theta<180°$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $(0°<\alpha<90°)$ を用いてよい。

(1)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

4　解答解説のページへ

1 つのさいころを 4 回投げて，出た目の数を順に x_1，x_2，x_3，x_4 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$x_1 < x_2$ となる確率を求めよ。

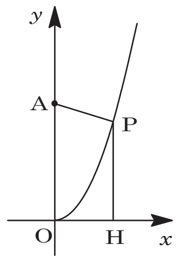
(2)　$x_1 < x_2 < x_3$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_k \geqq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ。ただし，$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のときは $k=4$ と定める。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{P}(t,\ at^2)$とおくと，$\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$より，

$$\mathrm{AP}^2=t^2+\left(at^2-a-\frac{1}{2a}\right)^2=a^2t^4-2a^2t^2+a^2+\frac{1}{4a^2}+1$$
$$=a^2(t^2-1)^2+\frac{1}{4a^2}+1$$

これより，$t^2=1\ (t=1)$のとき，AP^2は最小値$\dfrac{1+4a^2}{4a^2}$をとる。

すなわち$\mathrm{P}(1,\ a)$において，AP は最小値$\sqrt{\dfrac{1+4a^2}{4a^2}}=\dfrac{\sqrt{1+4a^2}}{2a}$

をとる。

(2)　$S(a)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{PH})\cdot\mathrm{OH}-\displaystyle\int_0^1 ax^2\,dx=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{2a}+a\right)\cdot 1-a\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{4a}$

(3)　$a>0$から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$S(a)\geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号は$\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{4a}$すなわち$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$のとき成立する。

よって，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$のとき，$S(a)$は最小値$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$をとる。

［解　説］

場合分けが不要であるように問題が設定されています。相加平均と相乗平均の関係を用いて，面積の最小値を求めます。

$\boxed{2}$　問題のページへ

(1)　2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ ……①が異なる 2 つの虚数解をもつ条件は,

$$D=t^2-4t=t(t-4)<0$$

よって, $0<t<4$ となり，このとき①より，$z=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4t}}{2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$

(2)　条件より，$z(t)=\dfrac{-t+\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$ なので，$z(t)=x+yi$ とおくと,

$$x=-\frac{t}{2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{\sqrt{-t^2+4t}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

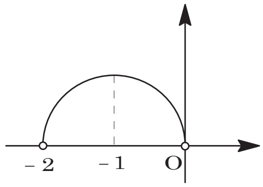
②より，$t=-2x$ となり，③に代入すると,

$$2y=\sqrt{-4x^2-8x}$$

$y>0$ で両辺を 2 乗すると，$4y^2=-4x^2-8x$

$$x^2+y^2+2x=0,\ (x+1)^2+y^2=1$$

よって，点 $z(t)$ の描く図形は, 右図のようになる。



(3)　$w=\dfrac{iz}{z+1}$ より，$(z+1)w=iz$，$(w-i)z=-w$ ………④

ここで，$w=i$ とすると④は成立しないので，$w\neq i$ から，$z=\dfrac{-w}{w-i}$ ………⑤

また, (2)より，点 z は点 -1 を中心とする半径 1 の上半円を描くので,

$$|z+1|=1\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad |z-i|<|z+i|\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥より，$\left|\dfrac{-w}{w-i}+1\right|=1$，$\left|\dfrac{-i}{w-i}\right|=1$ となり，$\dfrac{|-i|}{|w-i|}=1$ から，$|w-i|=1$

よって，点 w は点 i を中心とする半径 1 の円を描く。

⑤⑦より，$\left|\dfrac{-w}{w-i}-i\right|<\left|\dfrac{-w}{w-i}+i\right|$，$\left|\dfrac{(-1-i)w-1}{w-i}\right|<\left|\dfrac{(-1+i)w+1}{w-i}\right|$ となり,

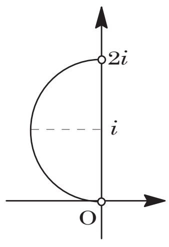
$$|(-1-i)w-1|<|(-1+i)w+1|\quad (w\neq i)$$

$|-1-i|\left|w+\dfrac{1}{1+i}\right|<|-1+i|\left|w+\dfrac{1}{-1+i}\right|$ から，$\sqrt{2}\left|w-\dfrac{-1+i}{2}\right|<\sqrt{2}\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|$

$$\left|w-\frac{-1+i}{2}\right|<\left|w-\frac{1+i}{2}\right|$$

よって，点 w は 2 点 $\dfrac{-1+i}{2}$，$\dfrac{1+i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線すなわち虚軸の左側にある。

以上まとめて，点 w の描く図形は, 右図のようになる。



［解　説］

複素数と軌跡に関する頻出タイプの問題です。なお, 軌跡の限界である z の虚部が正という条件は，⑦で数式化しています。

3

問題のページへ

(1)　$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ より，$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ $\left(\frac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$ のもとで,

$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 2$，$1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3$

すると，$-\frac{3}{2}\leqq\cos\theta<\frac{1}{2}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では,

$60°<\theta<180°$

(2)　$\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ より，$\sin\theta>0$ のもとで,

$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 1$，$\log_2\sin\theta\geqq-\frac{1}{2}$

すると，$\sin\theta\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では,

$45°\leqq\theta\leqq 135°$

(3)　条件より，$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0$ ……①，$\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 0$ ……②

①より，$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ $\left(\frac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$ のもとで,

$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$，$1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<2$

すると，$-\frac{3}{2}\leqq\cos\theta<-\frac{1}{2}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では,

$120°<\theta<180°$ ………③

②より，$\sin\theta>0$ のもとで,

$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 0$，$\log_2\sin\theta\geqq-\frac{3}{2}$，$\sin\theta\geqq\frac{1}{2\sqrt{2}}$

条件から，$\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $(0°<\alpha<90°)$ なので，$0°<\theta<180°$ の範囲では,

$\alpha\leqq\theta\leqq 180°-\alpha$ ………④

ここで，$\sin 120°>\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ から，$\alpha<120°<180°-\alpha$ となるので，③④より，求める θ の範囲は，$120°<\theta\leqq 180°-\alpha$ である。

［解 説］

ガウス記号つきの不等式ですが，それに三角関数，対数関数が混在し，盛りだくさんです。しかし，ポイントはていねいに解くだけです。

4

問題のページへ

(1)　さいころを 4 回投げるとき，目の数の組の総数は 6^4 通りである。
　さて，$x_1 < x_2$ となる場合は ${}_6C_2$ 通りで，x_3，x_4 は任意なので，その確率は,

$$\frac{{}_6C_2 \times 6^2}{6^4} = \frac{5}{12}$$

(2)　$x_1 < x_2 < x_3$ となる場合は ${}_6C_3$ 通りで，x_4 は任意なので，その確率は,

$$\frac{{}_6C_3 \times 6}{6^4} = \frac{5}{54}$$

(3)　$x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ となる場合は，$x_1 < x_2$ となる場合から $x_1 < x_2 < x_3$ となる場合を除いたものなので，その確率は,

$$\frac{5}{12} - \frac{5}{54} = \frac{35}{108}$$

(4)　(i)　$x_1 \geqq x_2$ のとき
　$k = 1$ となり, (1)より，その確率は $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ である。

(ii)　$x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ のとき
　$k = 2$ となり, (3)より，その確率は $\frac{35}{108}$ である。

(iii)　$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のとき
　条件より $k = 4$ となり，その確率は $\frac{{}_6C_4}{6^4} = \frac{5}{432}$ である。

(iv)　$x_1 < x_2 < x_3$ かつ $x_3 \geqq x_4$ のとき
　$k = 3$ となり, (3)と同様に考えて，その確率は $\frac{5}{54} - \frac{5}{432} = \frac{35}{432}$ である。

(i)～(iv)より, k の期待値は,

$$1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{35}{108} + 3 \times \frac{35}{432} + 4 \times \frac{5}{432} = \frac{73}{48}$$

［解　説］

順序関係が設定された事象の確率計算で，頻出のものです。2002 年に神戸大・理系で, 2003 年に一橋大で類題が出ています。