1

解答解説のページへ

直線 $l: y = x + a$ が曲線 $C: y = 2\sin x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

行列 A と列ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

とし，列ベクトル $\overrightarrow{p_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$\overrightarrow{p_1}=\vec{a},\ \overrightarrow{p_{n+1}}=A\overrightarrow{p_n}+\vec{b}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p}=A\vec{p}+\vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{q_n}=\overrightarrow{p_n}-\vec{p}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。$\overrightarrow{q_{n+1}}$ と $\overrightarrow{q_n}$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して A^n を求めよ。

(4) $\overrightarrow{p_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，$w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。

4

解答解説のページへ

実数 x に対して，$[x]$は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$を用いてよい。

(1)　不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3)　不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

5

解答解説のページへ

実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

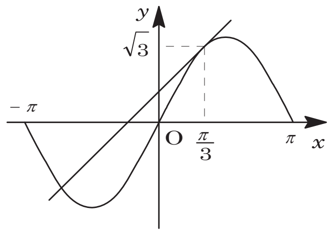
(1)　面積 $S(a)$ を求めよ。

(2)　$a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\lim_{a \to \infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。

(3)　$S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。

1

問題のページへ



(1)　$C: y=2\sin x$ より，$y'=2\cos x$

ここで，$y'=1$ とすると，$\cos x=\dfrac{1}{2}$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ から $x=\pm\dfrac{\pi}{3}$ となり，接点の座標は，

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right),\ \left(-\frac{\pi}{3},\ -\sqrt{3}\right)$$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，接線の方程式は，

$$y-\sqrt{3}=x-\frac{\pi}{3},\quad y=x+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$x=-\dfrac{\pi}{3}$ のとき，接線の方程式は，$y+\sqrt{3}=x+\dfrac{\pi}{3}$，$y=x-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$

すると，$a\geqq 0$ から，$a=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$ である。

(2)　接線と x 軸の交点は，$y=0$ として，$x=-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$ となる。

よって，求める回転体の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2dx$$

$$=\sqrt{3}\pi-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)\,dx=\sqrt{3}\pi-2\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi-\frac{2}{3}\pi^2$$

［解　説］

微積分の基本問題です。穏やかな始まりです。

2

問題のページへ

(1) Eを単位行列とするとき，$\vec{p}=A\vec{p}+\vec{b}$……①より，$(E-A)\vec{p}=\vec{b}$

ここで，$E-A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$より，$(E-A)^{-1}=2\cdot\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$となり，

$$\vec{p}=(E-A)^{-1}\vec{b}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

(2) 条件より，$\overrightarrow{p_{n+1}}=A\overrightarrow{p_n}+\vec{b}$………②

①②から，$\overrightarrow{p_{n+1}}-\vec{p}=A(\overrightarrow{p_n}-\vec{p})$となり，$\overrightarrow{q_n}=\overrightarrow{p_n}-\vec{p}$とおくと，

$$\overrightarrow{q_{n+1}}=A\overrightarrow{q_n}$$

(3) $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$に対して，ハミルトン・ケーリーの定理から，

$$A^2-A+\frac{1}{4}E=O,\ \left(A-\frac{1}{2}E\right)^2=O$$

ここで，$A-\dfrac{1}{2}E=B$とおくと，$B^2=O$から，

$$A^n=\left(\frac{1}{2}E+B\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^nE+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}B=\frac{1}{2^n}E+\frac{n}{2^{n-1}}B$$

$$=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

(4) (2)より，$\overrightarrow{q_n}=A^{n-1}\overrightarrow{q_1}$から，$\overrightarrow{p_n}-\vec{p}=A^{n-1}(\overrightarrow{p_1}-\vec{p})$となり，

$$\overrightarrow{p_n}=\vec{p}+A^{n-1}(\overrightarrow{p_1}-\vec{p})=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}1&n-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}-2n+1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}2^n-2n+1\\2^n-2\end{pmatrix}$$

［解　説］

数列と行列の融合で，頻出問題の 1 つです。(3)では，二項定理を利用しましたが，推測→帰納法でも OK です。

3

問題のページへ

(1) 2 次方程式$z^2+tz+t=0$ ……①が異なる 2 つの虚数解をもつ条件は,

$$D=t^2-4t=t(t-4)<0$$

よって, $0<t<4$ となり，このとき①より，$z=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4t}}{2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$

(2) 条件より，$z(t)=\dfrac{-t+\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$ なので，$z(t)=x+yi$ とおくと，

$$x=-\frac{t}{2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{\sqrt{-t^2+4t}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

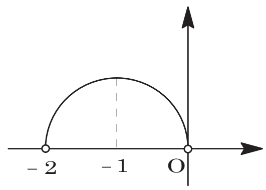
②より，$t=-2x$ となり，③に代入すると，

$$2y=\sqrt{-4x^2-8x}$$

$y>0$ で両辺を 2 乗すると，$4y^2=-4x^2-8x$

$$x^2+y^2+2x=0,\ (x+1)^2+y^2=1$$

よって，点$z(t)$の描く図形は，右図のようになる。



(3) $w=\dfrac{iz}{z+1}$ より，$(z+1)w=iz$，$(w-i)z=-w$ ………④

ここで，$w=i$ とすると④は成立しないので，$w\neq i$ から，$z=\dfrac{-w}{w-i}$ ………⑤

また, (2)より，点 z は点-1を中心とする半径 1 の上半円を描くので,

$$|z+1|=1\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad |z-i|<|z+i|\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥より，$\left|\dfrac{-w}{w-i}+1\right|=1$，$\left|\dfrac{-i}{w-i}\right|=1$ となり，$\dfrac{|-i|}{|w-i|}=1$ から，$|w-i|=1$

よって，点 w は点iを中心とする半径 1 の円を描く。

⑤⑦より，$\left|\dfrac{-w}{w-i}-i\right|<\left|\dfrac{-w}{w-i}+i\right|$，$\left|\dfrac{(-1-i)w-1}{w-i}\right|<\left|\dfrac{(-1+i)w+1}{w-i}\right|$ となり，

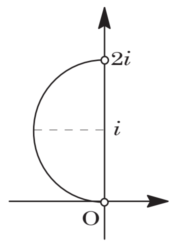
$$|(-1-i)w-1|<|(-1+i)w+1|\quad (w\neq i)$$

$|-1-i|\left|w+\dfrac{1}{1+i}\right|<|-1+i|\left|w+\dfrac{1}{-1+i}\right|$ から，$\sqrt{2}\left|w-\dfrac{-1+i}{2}\right|<\sqrt{2}\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|$

$$\left|w-\frac{-1+i}{2}\right|<\left|w-\frac{1+i}{2}\right|$$

よって，点 w は 2 点$\dfrac{-1+i}{2}$，$\dfrac{1+i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線すなわち虚軸の左側にある。

以上まとめて，点 w の描く図形は，右図のようになる。



[解 説]

複素数と軌跡に関する頻出タイプの問題です。なお，軌跡の限界である z の虚部が正という条件は，⑦で数式化しています。

4

問題のページへ

(1)　不等式$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$に対し，$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ $\left(\dfrac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$のもとで，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 2,\ 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3$$

すると，$-\dfrac{3}{2}\leqq\cos\theta<\dfrac{1}{2}$となり，$0<\theta<\pi$の範囲では，

$$\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$$

(2)　不等式$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$に対し，$\sin\theta>0$のもとで，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 1,\ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{1}{2}$$

すると，$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$となり，$0<\theta<\pi$の範囲では，

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi$$

(3)　不等式$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\cdots\cdots(*)$に対して，$0<\theta<\pi$の範囲では，

$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$および$\sin\theta>0$は成立している。

ここで，$-1<\cos\theta<1$より，$\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{2}+\cos\theta<\dfrac{7}{2}$となるので，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1,\ 2,\ 3$$

また，$0<\sin\theta\leqq 1$より，$\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\leqq\dfrac{3}{2}$となるので，$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\leqq 1$

(i)　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=1$ $\left(\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{2}+\cos\theta<2\right)$のとき

まず，$-1<\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$より，$\dfrac{2\pi}{3}<\theta<\pi\cdots\cdots\cdots$①

$(*)$より，$0\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$となり，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 0,\ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{3}{2},\ \sin\theta\geqq\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

条件から，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$なので，$0<\theta<\pi$の範囲では，

$$\alpha\leqq\theta\leqq\pi-\alpha\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\sin\dfrac{2\pi}{3}>\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$から，$\dfrac{2\pi}{3}<\pi-\alpha$となるので，

①②より，求めるθの範囲は，$\dfrac{2\pi}{3}<\theta\leqq\pi-\alpha$である。

(ii)　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=2$ $\left(2\leqq\dfrac{5}{2}+\cos\theta<3\right)$のとき

まず，$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<\dfrac{1}{2}$より，$\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}\cdots\cdots\cdots$③

$(*)$より，$1\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$となり，(2)より$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi\cdots\cdots\cdots$④

③④より，求めるθの範囲は，$\dfrac{\pi}{3}<\theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$である。

(iii) $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=3\left(3 \leqq \dfrac{5}{2}+\cos\theta<\dfrac{7}{2}\right)$のとき

まず，$\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta<1$より，$0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$

$(*)$より，$\log_2 3 \leqq \left[\dfrac{3}{2}+\log_2 \sin\theta\right]$となるが，$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2 \sin\theta\right] \leqq 1$に反する。

(i)～(iii)より，求めるθの範囲は，$\dfrac{\pi}{3}<\theta \leqq \pi-\alpha$である。

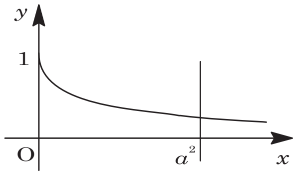
［解 説］

ガウス記号つきの不等式ですが，それに三角関数，対数関数が混在し，盛りだくさんです。(1)と(2)，および(3)の一部が文系と共通です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　t が $t \geqq 0$ で変化するとき，$x = t^2$，$y = e^{-t}$ の描く曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積 $S(a)$ は，



$$S(a) = \int_0^{a^2} y\,dx = \int_0^a e^{-t} \cdot 2t\,dt$$
$$= -2\Big[te^{-t}\Big]_0^a + 2\int_0^a e^{-t}\,dt$$
$$= -2ae^{-a} - 2\Big[e^{-t}\Big]_0^a = -2(a+1)e^{-a} + 2$$

(2)　$a > 0$ の範囲で, (1)より，$S'(a) = 2ae^{-a} > 0$

これより，$S(a)$ は単調に増加する。

さらに，$\lim\limits_{a \to \infty} ae^{-a} = 0$ より，

$$\lim_{a \to \infty} S(a) = \lim_{a \to \infty}\Big\{-2(a+1)e^{-a} + 2\Big\} = 2$$

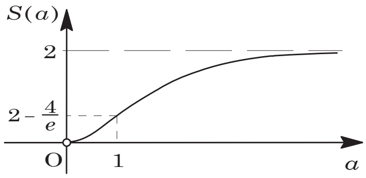
また，凹凸については，

$$S''(a) = 2e^{-a} - 2ae^{-a} = 2(1-a)e^{-a}$$

まとめると，右上の表となる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S''(a)$		$+$		$-$
$S(a)$	0	$\cup$	$2-\dfrac{4}{e}$	$\cap$

以上より，$S(a)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　$F(a) = S(a) - 1.35$ とおくと，$\dfrac{5}{2} < e < 3$ から，

$$F(2) = S(2) - 1.35 = -\frac{6}{e^2} + 0.65 < -6 \cdot \frac{1}{9} + 0.65 = -\frac{2}{3} + 0.65 < 0$$
$$F(3) = S(3) - 1.35 = -\frac{8}{e^3} + 0.65 > -8 \cdot \frac{8}{125} + 0.65 = -\frac{64}{125} + 0.65 > 0$$

よって，$F(a) = 0$ は $2 < a < 3$ の範囲に解をもつ。すなわち，$S(a) = 1.35$ となる a は $2 < a < 3$ の範囲に存在する。

［解 説］

第 1 問と同じく，微積分の基本問題です。穏やかな終わりです。