1

解答解説のページへ

曲線$C: y=x^2$上に点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする。ただし，$t>0$ とする。接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれR_1，R_2とする。また，$\triangle\mathrm{PQR}_1$の面積をS_1とし，曲線 C と y 軸および線分PR_2で囲まれる図形の面積をS_2とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 Q と点R_1の x 座標を t を用いて表せ。

(2)　面積S_2を t を用いて表せ。

(3)　$S_1>S_2$が成り立つ t の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$a_1 = b_1 = 1$および，関係式

$$a_{n+1} = 2a_n b_n\ ,\ \ b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，a_n とb_n は互いに素であることを示せ。

3

解答解説のページへ

空間ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$について次の問いに答えよ。ただし, h と k は実数とする。

(1)　$h\vec{a}+\vec{b}$が$\vec{a}$と垂直であるとき, すべての実数 x に対して,

$$|x\vec{a}+\vec{b}| \geqq |h\vec{a}+\vec{b}|$$

が成り立つことを示せ。ただし, $\vec{0}$はすべてのベクトルと垂直であるとする。

(2)　$h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$が$\vec{a}$, $\vec{b}$のいずれとも垂直であるとき, すべての実数 x, y に対して,

$$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}| \geqq |h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$$

が成り立つことを示せ。

(3)　$\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 4,\ -2)$, $\vec{c}=(-3,\ -6,\ 6)$とするとき, $|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$の最小値を与える実数 x, y と, そのときの最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ について，次の問いに答えよ。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　実数 k に対し，$f(x)=k$ を満たす x の個数を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$y = x^2$ に対して，$y' = 2x$ より，接線 l の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2$$

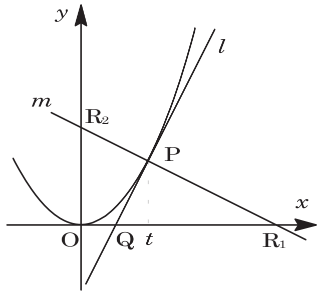
x 軸との交点 Q は，$2tx - t^2 = 0$ より $x = \dfrac{t}{2}$

また, P を通り, l に垂直な直線 m の方程式は,

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t),\quad y = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2} + t^2$$

x 軸との交点 R_1 は，$-\dfrac{1}{2t}x + \dfrac{1}{2} + t^2 = 0$ より，

$$\frac{1}{2t}x = \frac{1}{2} + t^2,\quad x = t + 2t^3$$



(2)　R_2 の y 座標は，$y = \dfrac{1}{2} + t^2$ より，

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(t^2 + \frac{1}{2} + t^2\right)\cdot t - \int_0^t x^2 dx = t^3 + \frac{1}{4}t - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t$$

(3)　$S_1 = \dfrac{1}{2}\left(t + 2t^3 - \dfrac{1}{2}t\right)\cdot t^2 = \dfrac{1}{4}t^3 + t^5$ となり，$S_1 > S_2$ から，

$$\frac{1}{4}t^3 + t^5 > \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t,\quad 12t^5 - 5t^3 - 3t > 0,\quad t(4t^2 - 3)(3t^2 + 1) > 0$$

よって, $t > 0$ から，$t > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

［解 説］

微積分に関するセンターレベルの問題です。曲線と直線の位置関係についても，場合分けは必要ありません。

2

問題のページへ

(1)　$n \geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=3$ のとき　$a_1=b_1=1$ より，$a_2=2\times1\times1=2$，$b_2=2\times1^2+1^2=3$ となり，

$$a_3=2\times2\times3=12,\ b_3=2\times2^2+3^2=17$$

よって，題意は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　a_k は 3 で割り切れ，b_k は 3 で割り切れないと仮定する。

すなわち l, m を整数として，

$$a_k=3l,\ b_k=3m\pm1$$

このとき，$a_{k+1}=6l(3m\pm1)=3\cdot2l(3m\pm1)$

$$b_{k+1}=2\cdot9l^2+(3m\pm1)^2=3(6l^2+3m^2\pm2m)+1$$

よって，$n=k+1$ のとき，題意は成立する。

(i)(ii)より, $n \geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れない。

(2)　まず, $n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1}=2a_nb_n$ より，a_n は偶数である。

また，$b_1=1$，$b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$ より，帰納的に b_n は奇数である。

さて，$n \geqq 2$ のとき a_n と b_n は互いに素であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　$a_2=2$，$b_2=3$ から，a_2 と b_2 は互いに素である。

(ii)　$n=k$ のとき　a_k と b_k は互いに素であると仮定する。

ここで，a_{k+1} と b_{k+1} が 2 以上の公約数をもつとする。すると，a_{k+1} は偶数，b_{k+1} は奇数から，この公約数は 3 以上の素数を約数としてもつ。

この素数を g とし，a'，b' を整数とすると，

$$a_{k+1}=2a_kb_k=ga'\cdots\cdots①,\ b_{k+1}=2{a_k}^2+{b_k}^2=gb'\cdots\cdots②$$

①より，a_k と b_k のいずれかは g の倍数となる。

a_k が g の倍数であるとき，②より ${b_k}^2$ は g の倍数，すなわち b_k は g の倍数である。また，b_k が g の倍数であるとき，②より $2{a_k}^2$ は g の倍数，すなわち a_k は奇数 g の倍数である。

いずれの場合も，a_k と b_k は互いに素であるという仮定に反するので，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より, $n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素である。

[解　説]

整数と漸化式の融合問題です。ただ，(2)の証明を考えるときに，(1)の結論に縛られすぎると，時間を空費してしまいます。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$(h\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ なので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-h|\vec{a}|^2$ となり，

$$|x\vec{a}+\vec{b}|^2-|h\vec{a}+\vec{b}|^2=(x^2-h^2)|\vec{a}|^2+2(x-h)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=(x^2-h^2)|\vec{a}|^2-2(x-h)h|\vec{a}|^2=(x^2-2xh+h^2)|\vec{a}|^2$$
$$=(x-h)^2|\vec{a}|^2=|(x-h)\vec{a}|^2\geqq 0$$

よって，$|x\vec{a}+\vec{b}|^2\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|^2$ から，$|x\vec{a}+\vec{b}|\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|$

なお, 等号は，$(x-h)\vec{a}=\vec{0}$ のときに成立する。

(2)　条件より，$(h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=0$，$(h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}=0$ なので，

$$h|\vec{a}|^2+k\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdots\cdots①,\ \ h\vec{a}\cdot\vec{b}+k|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdots\cdots②$$

これより，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-h|\vec{a}|^2-k\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-h\vec{a}\cdot\vec{b}-k|\vec{b}|^2$ となり，

$$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2-|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|^2$$
$$=(x^2-h^2)|\vec{a}|^2+(y^2-k^2)|\vec{b}|^2+2(xy-hk)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(y-k)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(x-h)\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$=(x^2-2xh+h^2)|\vec{a}|^2+(y^2-2yk+k^2)|\vec{b}|^2+2(xy-xk+hk-hy)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=(x-h)^2|\vec{a}|^2+(y-k)^2|\vec{b}|^2+2(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=|(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}|^2\geqq 0$$

よって，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2\geqq|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|^2$ から，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|\geqq|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$

なお, 等号は，$(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}=\vec{0}$ のときに成立する。

(3)　条件より，$|\vec{a}|^2=1+1+1=3$，$|\vec{b}|^2=1+16+4=21$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1+4-2=3,\ \ \vec{a}\cdot\vec{c}=-3-6+6=-3,\ \ \vec{b}\cdot\vec{c}=-3-24-12=-39$$

①②より，$3h+3k-3=0$，$3h+21k-39=0$

$$h+k-1=0\cdots\cdots③,\ \ h+7k-13=0\cdots\cdots④$$

③④より，$h=-1$，$k=2$ となり，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|\geqq|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|\cdots\cdots\cdots⑤$

等号成立は，$(x+1)\vec{a}+(y-2)\vec{b}=\vec{0}$ のときであり，さらに $\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立から，$x=-1$，$y=2$ の場合となる。

よって，⑤から $x=-1$，$y=2$ のとき，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は最小となり，最小値は，$-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=(-2,\ 1,\ 1)$ より，

$$|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

［解 説］

(2)の不等式を用いて(3)の最小値を求めるという出題意図は明白です。また, 等号成立のチェックは必要ですが, これは簡単に済んでしまいます。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=0$ より，$\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|=0$，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\sin x-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$

すると，$\sin x=1$，$\sin x=0$ から，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ において，

$$x=\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pm\pi$$

(2)　$g(x)=\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}$ とおくと，

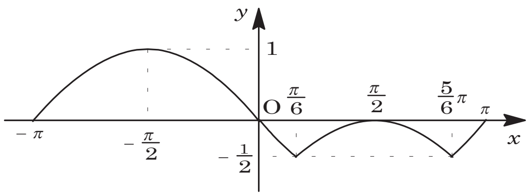
(i)　$-\pi\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$g(x)=-\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\sin x$$

(ii)　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\sin x-1$$

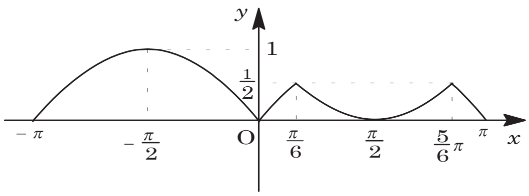
よって，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



すると，$f(x)=|g(x)|$ から，

$$f(x)=g(x)\quad(g(x)\geqq 0)$$
$$f(x)=-g(x)\quad(g(x)\leqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　$f(x)=k$ を満たす異なる x の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数に一致する。

したがって，$k<0$，$1<k$ のとき 0 個，$k=1$ のとき 1 個，$\dfrac{1}{2}<k<1$ のとき 2 個，$k=0$，$\dfrac{1}{2}$ のとき 4 個，$0<k<\dfrac{1}{2}$ のとき 6 個である。

［解 説］

絶対値が二重についている関数のグラフを描く問題です。丁寧に場合分けをすると，完答できます。